1. Teorema de equipartición

Para la demostración, ver la clase.
En el caso de $E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$, tenemos

$$\langle E\rangle = \langle \frac{p_x^2}{2m}\rangle + \langle \frac{p_y^2}{2m}\rangle + \langle \frac{p_z^2}{2m}\rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

En el segundo caso, tenemos

$$\langle E\rangle = \langle \frac{p^2}{2m}\rangle + \langle \frac{1}{2}kx^2\rangle = k_B T$$

2. Experimento de Kapler

La función de partición es

$$Z = \frac{1}{h}\int dp_\varphi d\varphi e^{-\beta\left(\frac{p_\varphi^2}{2I}+\frac{1}{2}C\varphi^2\right)} = \frac{k_B T}{\hbar}\sqrt{\frac{I}{C}}$$

Lo que implica

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} = k_B T$$

y

$$\langle \varphi^2\rangle = \frac{\int dp_\varphi d\varphi \varphi^2 e^{-\beta\left(\frac{p_\varphi^2}{2I}+\frac{1}{2}C\varphi^2\right)}}{\int dp_\varphi d\varphi e^{-\beta\left(\frac{p_\varphi^2}{2I}+\frac{1}{2}C\varphi^2\right)}} = -\frac{2}{\beta}\frac{\partial_C Z}{Z} = -\frac{2}{\beta}\partial_C \log Z = \frac{k_B T}{C}$$

De forma similar, usando el teorema de equipartición, tenemos

$$\langle E\rangle = \langle \frac{p_\varphi^2}{2I}\rangle + \langle \frac{1}{2}C\varphi^2\rangle = \frac{1}{2}k_B T + \frac{1}{2}k_B T = k_B T$$

y

$$\langle \frac{1}{2}C\varphi^2\rangle = \frac{1}{2}k_B T = k_B T$$

lo que implica

$$\langle \varphi^2\rangle = \frac{k_B T}{C}$$

El análisis de las fluctuaciones angulares da $\langle \varphi^2\rangle = 4.178\ 10^{-6}\ rad^2$ con $C = 9.428\ 10^{-9}\ g.cm^2.s^{-2}$ a una temperatura de $T = 287.1\ K$. Lo que implica

$$k_B = 1.372\ 10^{-23}\ J/K$$

lo que es suficientemente cercano a $k_B = 1.380\ 10^{-23}\ J/K$.

3. Densidad de estado de los fonones

La ecuación de movimiento es

$$m\ddot{u}_n + \lambda\left(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}\right) = 0$$

En el limite continuo, si llamamos $u_n = f(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(x+a) \simeq f(x) + af'(x) + \frac{a^2}{2}f''(x) \\ u_{n-1} &= f(x-a) \simeq f(x) - af'(x) + \frac{a^2}{2}f''(x) \end{aligned}$$

lo que implica

$$2u_n - u_{n-1} - u_{n+1} = a^2 f''(x)$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\lambda a^2}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

lo que nos permite identificar la velocidad de propagación $c_s = a\sqrt{\frac{\lambda}{m}}$.
Buscamos soluciones de la ecuación para u_n de la forma de ondas planas $u_n = Ae^{i\omega t - ikna}$

$$\begin{aligned} -m\omega^2 &= -\lambda(\underbrace{2 - e^{ika} - e^{-ika}}_{2-2\cos ka}) = -2\lambda(1-\cos ka) \\ &= -4\lambda \sin^2\frac{ka}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega(k) = 2\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right| \end{aligned}$$

Consideramos condiciones periódicas $u_{n+N} = u_n$ (cadena cerrada)

$$\Rightarrow e^{ikNa} = 1 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{Na}\cdot l \quad l \in \mathbb{Z}$$

Pero como Na es el tamaño de la cadena (L)

$$\Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{L}\cdot l \quad l \in \mathbb{Z}$$

Para $k \ll 1$; $\quad \omega \simeq \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\cdot ak \equiv c_s \cdot k$
Podemos ahora calcular la densidad de estados $\rho(\omega)$
En 3D, tenemos $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\left(l_x \cdot \vec{e}_x + l_y\vec{e}_y + l_z\vec{e}_z\right)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \sum_{\vec{l}} \simeq \int d^3l = \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int d^3k &= \frac{V4\pi}{(2\pi)^3}\int k^2 dk \\ &= \frac{V}{2\pi^2}\frac{1}{c_s^3}\int \omega^2 d\omega \\ &= \int \rho(\omega)d\omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho(\omega) = \frac{V}{2\pi^2 c_s^3}\omega^2$$

En realidad, las oscilaciones son de 3 formas distintas, una oscilación transversa (misma dirección que $\vec{k}$) y 2 longitudinales (ortogonales a $\vec{k}$) con velocidades c_t y c_l, lo que implica

$$\rho(w) = \frac{3V}{2\pi^2 c^3} w^2 \quad \text{con} \quad \frac{3}{c^3} \equiv \frac{2}{c_t^3} + \frac{1}{c_l^3}$$

Lo que nos reproduce el resultado usado por Debye.