

1. Energía de oscilación clásica

Para obtener la energía o temperatura, necesitamos calcular la entropía es decir el numero de microestados. Para eso, calcularemos primero la densidad de estados integrado (asumiendo un factor de degeneración $g = 2$)

$$N_{<}(E) = \frac{2}{h^N} \int_{H \leq E} dq_1 dq_2 \cdots dq_N dp_1 dp_2 \cdots dp_N$$

Ocuparemos el cambio de variables $p_i = \sqrt{2mE}x_i$ y $q_i = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}y_i$, lo que transforma

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_i^2 \right) \leq E \iff \sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2) \leq 1$$

$$\begin{aligned} N_{<}(E) &= \frac{2E^N}{(\hbar\omega)^N} \int_{\text{volumen de una } 2N\text{-esfera}} dx_1 dx_2 \cdots dx_N dy_1 dy_2 \cdots dy_N \\ &= \frac{2E^N}{(\hbar\omega)^N \Gamma(N+1)} \end{aligned}$$

Lo que implica $W = N'_{<}(E) = \frac{2E^{N-1}}{(\hbar\omega)^N \Gamma(N)}$. De lo cual podemos deducir

$$S = k_B \ln W = k_B \ln \left(\frac{2}{(\hbar\omega)^N \Gamma(N)} \right) + k_B(N-1) \ln E$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = k_B \frac{N-1}{E}$$

es decir

$$E = (N-1)k_B T$$

En el caso puramente cuántico, habíamos encontrado

$$E = \hbar\omega N \left(\frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} + \frac{1}{2} \right)$$

En el límite $\hbar \rightarrow 0$, obtenemos

$$E = Nk_B T$$

lo que corresponde al caso clásico si $N \gg 1$.

2. Gas ultra-relativista

Como el caso anterior, debemos calcular la densidad de estados integrado

$$N_{<}(E) = \frac{2}{h^{3N}} \int_{H \leq E} d^3 q_1 d^3 q_2 \cdots d^3 q_N d^3 p_1 d^3 p_2 \cdots d^3 p_N$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{h^{3N}} V^N \int_{H \leq E} d^3 p_1 d^3 p_2 \cdots d^3 p_N \\
&= \frac{2}{h^{3N}} V^N \left(\frac{E}{c}\right)^{3N} \int_{\sum_i |x_i| \leq 1} d^3 x_1 d^3 x_2 \cdots d^3 x_N \quad (p_i = x_i E/c)
\end{aligned}$$

Para el caso en 2 dimensiones, debemos calcular

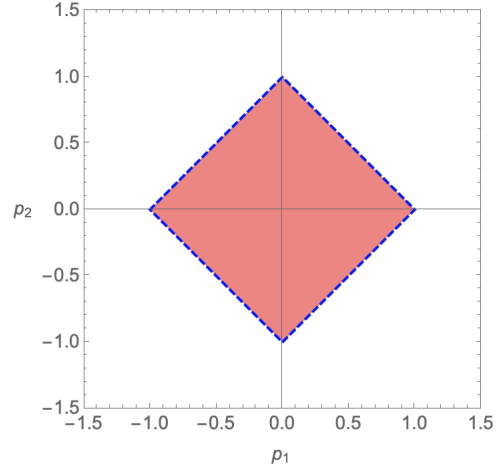
$$\int_{|p_1|+|p_2| \leq 1} dp_1 dp_2$$

Lo que corresponde a

- $p_2 \leq 1 - p_1$, si $p_1 \geq 0$ y $p_2 \geq 0$
- $p_2 \geq p_1 - 1$, si $p_1 \geq 0$ y $p_2 \leq 0$
- $p_2 \leq 1 + p_1$, si $p_1 \leq 0$ y $p_2 \geq 0$
- $p_2 \geq -p_1 - 1$, si $p_1 \leq 0$ y $p_2 \leq 0$

Es decir la zona colorada del gráfico, lo que corresponde a

$$\int_{|p_1|+|p_2| \leq 1} dp_1 dp_2 = 2 \equiv \frac{2^2}{2!}$$

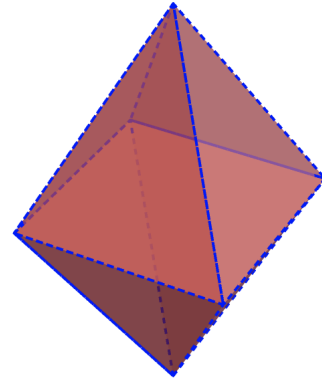


De forma similar para el caso en 3 dimensiones, debemos calcular la integral

$$\int_{|p_1|+|p_2|+|p_3| \leq 1} dp_1 dp_2 dp_3$$

lo que corresponde al volumen colorado, es decir 2 veces el volumen superior. Sabiendo que el volumen superior es área de la base \times altura /3. Tenemos

$$\int_{|p_1|+|p_2|+|p_3| \leq 1} dp_1 dp_2 dp_3 = 2 \frac{2 \times 1}{3} = \frac{4}{3} \equiv \frac{2^3}{3!}$$



De forma genérica podemos concluir que

$$\int_{\sum_{i=1}^N |p_i| \leq 1} dp_1 dp_2 \cdots dp_N = \frac{2^N}{N!}$$

Lo que nos permite obtener

$$N_{<}(E) = \frac{2}{h^{3N}} V^N \left(\frac{E}{c}\right)^{3N} \frac{2^{3N}}{(3N)!}$$

y por lo tanto

$$W = N'_{<}(E) = \frac{2}{c^{3N} h^{3N}} \frac{2^{3N}}{(3N-1)!} V^N E^{3N-1}$$

Podemos obtener la entropía

$$S = k_B \ln\left(\frac{2}{c^{3N} h^{3N}} \frac{2^{3N}}{(3N-1)!}\right) + N k_B \ln V + (3N-1) k_B \ln E$$

es decir

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{(3N-1)k_B}{E} \simeq \frac{3Nk_B}{E}$$

$$\frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{Nk_B}{V}$$

o de forma similar

$$PV = Nk_B T$$

$$E = 3Nk_B T$$

Lo que encontramos también bajo la forma

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V}$$

3. Partículas con volumen excluido

Tenemos N partículas que ocupan $M = V/\sigma$ celdas. El numero de formas de disponer las N partículas dentro de este volumen es $W = C_M^N$, lo que implica una entropía

$$S = k_B [\ln M! - \ln N! - \ln(M-N)!]$$

$$\simeq k_B [M \ln M - N \ln N - (M-N) \ln(M-N)]$$

Lo que nos permite obtener la presión

$$\frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial S}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial V} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial S}{\partial M} = \frac{k_B}{\sigma} (\ln M - \ln(M-N)) = -\frac{k_B}{\sigma} \ln\left(1 - \frac{N}{M}\right)$$

Tenemos la ecuación de estado

$$PV = -k_B M T \ln\left(1 - \frac{N}{M}\right), \quad M \equiv \frac{V}{\sigma}$$

Para $N \ll M$, tenemos correcciones al gas perfecto

$$PV = -k_B M T \left(-\frac{N}{M} - \frac{1}{2} \left(\frac{N}{M}\right)^2 + \dots \right)$$

$$= Nk_B T \left(1 + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{N}{V}\right) + \dots \right)$$

con la ecuación del gas perfecto en el límite $\sigma \rightarrow 0$.