1. Entropía de los agujeros negros

Usamos la primera ley de la termodinámica (sin cambio de volumen o de partículas)

$$\begin{aligned} dE &= TdS \\ c^2 dM &= \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M} dS \\ dS &= \frac{8\pi G k_B}{\hbar c} M dM \\ S &= \frac{4\pi G k_B}{\hbar c} M^2 \end{aligned}$$

Pero como el área es $A = 4\pi R^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}$, obtenemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{4\pi G k_B}{\hbar c} M^2 \\ &= \frac{c^3 k_B}{4G\hbar} A \\ &= \frac{k_B}{4} \frac{A}{l_P^2} \end{aligned}$$

con $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ la escala de Planck

2. Defecto intersticial

Queremos desplazar n átomos dentro de N hacia n sitios intersticiales dentro de N. Por lo tanto, necesitamos elegir n átomos dentro de N a desplazar, es decir que tenemos C_N^n posibilidades. Estos n átomos se deben distribuir sobre los N sitios es decir de nuevo C_N^n posibilidades, lo que implica $W = (C_N^n)^2$ maneras para que n átomos se encuentran excitados hacia los n sitios intersticiales.
Según la formula de Boltzmann, la entropía es

$$S = k_B \ln W = 2k_B \Big[\ln N! - \ln n! - \ln(N-n)! \Big]$$

Asumiendo que todos los numeros son grandes, tenemos según la aproximación de Stirling $\ln M! \simeq M \ln M - M, \quad (M \gg 1)$, lo que implica

$$\begin{aligned} S &= 2k_B \Big[N \ln N - N - n \ln n + n - (N-n)\ln(N-n) + N - n \Big] \\ &= 2k_B \Big[N \ln N - n \ln n - (N-n)\ln(N-n) \Big] \end{aligned}$$

lo que implica (desde $dE = TdS - PdV + \mu dN$)

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial S}{\partial n} = \frac{2k_B}{\epsilon}\Big(-1 - \ln n + \ln(N-n) + 1 \Big) = \frac{2k_B}{\epsilon} \ln\Big(\frac{N}{n} - 1 \Big) \simeq \frac{2k_B}{\epsilon} \ln \frac{N}{n}$$

es decir

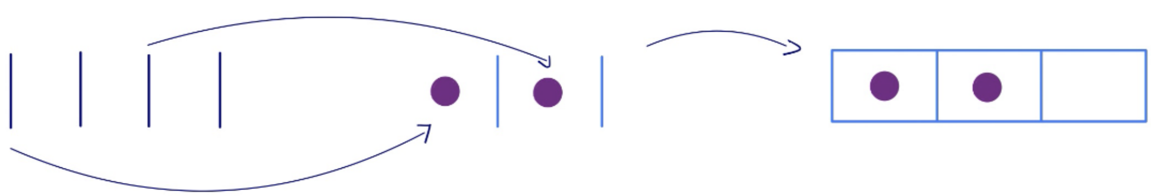
$$n = N e^{-\epsilon/2k_B T}$$

Veamos que n crece con la temperatura pero disminuye con la energía. Si ϵ es más grande, es más difícil obtener estos movimientos de los átomos, pero si la temperatura aumenta, es más probable tener estos movimientos. En conclusión, tenemos $E = n\epsilon = \epsilon N e^{-\epsilon/2k_BT}$, lo que implica

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{N\epsilon^2}{2k_BT^2}e^{-\epsilon/2k_BT}$$

3. Energía de oscilación

Buscamos las diferentes formas de obtener M a partir de los números enteros $\{n_i\}$. Si $M = 1$, tenemos N posibilidades ($n_1 = 1, n_2 = 0, \cdots, n_N = 0$ y las N permutaciones). Para $M = 2$, podemos tener un oscilador con $n = 2$ y los demás con $n = 0$ (N configuraciones) además de tener 2 osciladores con las energías $n = 1$ cada uno, y los demás con energía nula. Este último caso corresponde a $N(N-1)/2$ configuraciones lo que implica un total de $N + N(N-1)/2 = N(N+1)/2$. De forma similar, para $M = 3$ podemos obtener $C_N^1 + 2C_N^2 + C_N^3 = N(N+1)(N+2)/6$... De estas formulas podemos deducir que el numero de formas de obtener un entero M a partir de N enteros es C_{M+N-1}^M. Una forma más intuitiva de obtener este resultado es la siguiente. Queremos obtener un entero M a partir de N enteros más pequeño. Es equivalente a llenar M objetos dentro de N cajas. Por lo tanto, una forma de construir N cajas es de formar $N-1$ paredes entre los objetos. Consideramos que los M objetos y $N-1$ paredes forman $M+N-1$ súper-objetos. Cada vez que elegimos un cierto numero de estos súper-objetos, se transforman en objetos y los demás en paredes y así tenemos una configuración de cajas con objetos dentro. Por ejemplo, en el caso de $M = 2$ y $N = 3$ tenemos, obtenemos 4 súper-objetos



En resumen, el problema se reduce a saber cuantas formas tenemos de elegir M (objetos) o $N-1$ (paredes) dentro de $M+N-1$ súper-objetos, es decir $W = C_{M+N-1}^{N-1} = C_{M+N-1}^M$
De lo cual podemos fácilmente obtener la entropía

$$S = k_B \ln W = k_B\Big[\ln(M+N-1)! - \ln M! - \ln(N-1)!\Big] \simeq k_B\Big[(M+N)\ln(M+N) - M\ln M - N\ln N\Big]$$

y la energía en función de la temperatura

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial E} = \frac{k_B}{\hbar\omega}\ln\Big(1 + \frac{N}{M}\Big)$$

es decir

$$M = \frac{N}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1}$$

La energía se reescribe

$$E = \hbar\omega\Big(M + \frac{N}{2}\Big) = \hbar\omega N\Big(\frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1} + \frac{1}{2}\Big)$$

Obtenemos para la capacidad calorífica

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = Nk_B\Big(\frac{T_E}{T}\Big)^2\frac{e^{T_E/T}}{\Big(e^{T_E/T} - 1\Big)^2}, \quad \text{con } T_E = \frac{\hbar\omega}{k_B} \text{ la temperatura de Einstein}$$