Análisis de Errores

Ninguna medición es perfecta.

Una de las ideas falsas más comunes acerca de la ciencia es que ésta es “exacta”. Es muy difícil lograr que los alumnos que se inician en ciencias crean que ninguna medición es perfectamente correcta. Ellos tienden a pensar que si una medición se aleja un poco del resultado “real”, esto se debe a un error –si un profesional la hubiese hecho, ésta debería haber sido “exacta”. ¡Falso!

Lo que los científicos pueden hacer es estimar qué tan alejados podrían estar del valor “real”. Este tipo de estimación es llamado “Barra de Error”, y es expresada con el símbolo ± (léase más o menos). Por ejemplo, si al medir el peso de mi perro indico que éste es 26 ± 1 kilógramos, estoy diciendo que mi mejor estimación del peso es de 26 kilógramos, y que pienso que yo podría estar “errado” en algo así como 1 kilógramo de más o de menos. El término “Barra de Error” proviene de la convención usada para representar el rango de incerteza de una medición en un gráfico, aunque el término también se usa si no hay gráfico involucrado.

Algunos excelentes trabajos científicos resultan en mediciones que, sin embargo, tienen barras de error grandes. Por ejemplo, actualmente la mejor medición de la edad del universo es de 15 ± 5 mil millones de años. Eso puede que no parezca tener una maravillosa precisión, pero las personas que la realizaron sabían lo que estaban haciendo. Nada más resulta ser que las únicas técnicas disponibles para determinar la edad del universo son inherentemente pobres.

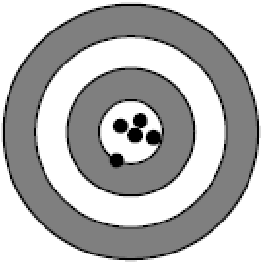
Aun cuando las técnicas para realizar mediciones son muy precisas, las barras de errores están presentes. Por ejemplo, los electrones actúan como pequeños magnetos, y la fuerza de pequeños magnetos, tales como los de cada electrón, se acostumbra a ser medida en unidades llamadas Magnetón de Bohr. A pesar de que la fuerza magnética de un electrón es una de las cantidades medidas con mayor precisión, el mejor de los valores experimentales presenta barras de error: 1.0011596524 ± 0.0000000002 magnetones de Bohr.

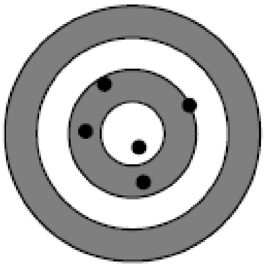
Existen varias razones de por qué es importante, en el trabajo científico, indicar estimaciones numéricas de las barras de error. Si el objetivo de tu experimento es testear cuándo los resultados son como los predichos por la teoría, tu sabes que siempre habrá una diferencia, aun si la teoría es absolutamente correcta. Necesitas saber cuándo la medición es razonablemente consistente con la teoría o cuándo la discrepancia es muy grande para ser explicada por las limitaciones de los aparatos de medida.

Otra razón importante para señalar resultados con sus barras de errores es que otras personas podrían usar tus mediciones para propósitos que tu no tenías en mente. De manera que si ellos van a hacer uso de éstos de manera inteligente, necesitan saber qué tan exactos fueron.

Las Barras de Errores no son límites absolutos.

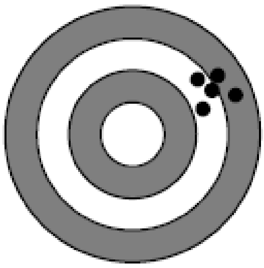
Las barras de errores no son limites absolutos. El verdadero valor podría estar fuera de ellas. Si uso una mejor escala podría encontrar que el peso de mi perro es de 25,8 ± 0,1 kilogramos, dentro de mi error original, pero también es posible que el mejor resultado fuese 23,2 ± 0,1 kilogramos. Dado que siempre hay alguna probabilidad de estar alejado en algo más que tus barras de errores, o incluso mucho más que eso, no tiene sentido insistir en esfuerzos por asegurar absolutamente que el verdadero valor está dentro del rango que has establecido. Cuando un científico indica una medición con barras de errores, no está diciendo “Si el valor verdadero está fuera de ese rango merezco ser corrido de la profesión.” Si fuera ese el caso, entonces cada científico debería señalar barras de errores infladas ridículamente para evitar tener que terminar sus carreras por uno de los cientos de resultados publicados. Lo que los científicos se comunican unos a otros mediante las barras de errores es un monto típico por el cuál ellos podrían estar desviados, no un límite superior.





Pequeños errores aleatorios.
Pequeños errores sistemáticos.

Errores aleatorios grandes.
Pequeños errores sistemáticos.



Pequeños errores aleatorios,
Errores sistemáticos grandes.

Errores Aleatorios y Errores Sistemáticos.

Imagina que mides la longitud de un sofá con una huincha de medir, lo mejor que puedas, hasta el milímetro más cercano. Si repites nuevamente la medición, obtendrás una respuesta distinta (asumiendo que no estás psicológicamente predispuesto a repetir el resultado previo y que 1 [mm] es cercano al límite de lo que puedes distinguir en la huincha). Si continúas repitiendo la medición, podrías obtener un listado de valores como el siguiente:

Largo Sofá (cm)
203,1
203,4
202,8
203,3
203,2
203,4
203,1
202,9
203,9
203,1

Las variaciones de este tipo se denominan Errores Aleatorios, debido a que el resultado es diferente cada vez que realizas la medición.

Los efectos de los errores aleatorios pueden ser minimizados promediando muchas mediciones. Algunas de las mediciones incluidas en el promedio son muy grandes o muy pequeñas, de manera que el promedio tiende a ser mejor que una medición individual. Mientras más mediciones promedies más preciso es el promedio. Para la lista indicada, el promedio es de 203,1 [cm]. Y, aunque promediar muchas mediciones no puede eliminar completamente los errores aleatorios, el hacerlo puede reducirlos.

Por otro lado, ¿qué pasaría si la huincha de medir fue sobre-estirada un poco, de tal forma que tus mediciones siempre tienden a resultar cortas en 0,3 [cm]? Eso sería un ejemplo de un Error Sistemático. Dado que el error sistemático es el mismo cada vez, promediar no nos ayudaría a deshacernos de él. Probablemente no tendrías una manera sencilla de encontrar el monto del estiramiento exactamente, de forma que sólo te queda sospechar que podría haber un error sistemático debido a sobre-estirar la huincha de medir.

Algunos escritores científicos hacen distinción entre los términos "***exactitud***" y "***precisión***". Una medición precisa es aquella con errores aleatorios pequeños, mientras que una medición exacta es aquella que es cercana al resultado verdadero, teniendo ambas errores aleatorios y errores sistemáticos pequeños. Personalmente, encuentro que la distinción se hace más clara con los términos "error aleatorio" y "error sistemático."

El signo ± usado con las barras de errores normalmente implican a lo que nos referimos con errores aleatorios, dado que éstos podrían ser positivos o negativos, mientras que los errores sistemáticos deberían estar siempre inclinados en la misma dirección.

El Objetivo del Análisis de Errores.

Muy rara vez los resultados de un experimento vienen directamente desde un reloj, regla, o algún otro tipo de dispositivo de medida. Es más común tener los datos en bruto a partir de mediciones directas y entonces, mediante cálculos que utilizan los datos brutos llegamos a un resultado final. Como ejemplo: sí lo que quieres es medir el kilometraje de combustible de tu auto, los datos brutos deberían ser el número de litros de combustible consumido y el número de kilómetros que has viajado. Luego, deberías realizar la división de kilómetros por litro para obtener el resultado final. Cuando alguien más vea tus resultados, no van a estar interesados en cuan exacto mediste los litros o en cuan exacta realizaste la medición de kilómetros recorridos. Ellos simplemente querrán saber cuan exacto fue el resultado final. ¿Fue éste 22 ± 2 [km/l], ó 22,137 ± 0.002 [km/l]?

Por supuesto la exactitud del resultado final está basada y limitada por la exactitud de tus datos en bruto. Si estás alejado en 0.2 [l], entonces el monto de ese error afectará tus resultados finales. Solemos decir que los errores en los datos en bruto se "propagan" a través de los cálculos. Cuando se requiere que realices un "análisis de errores" en un informe de laboratorio, esto significa que deberás hacer uso de las técnicas que se explicarán a continuación para determinar las barras de error en tus resultados finales. Existen dos grupos de técnicas que necesitarás aprender:

- Técnicas para encontrar la exactitud de tus datos en bruto,
- Técnicas para el uso del error en tus datos en bruto al deducir el error en tus resultados finales.

Estimando errores aleatorios en los datos en bruto.

Ahora examinaremos tres posibles técnicas para estimar los errores aleatorios existentes en tus mediciones originales, ilustrándolas con las mediciones del largo del sofá.

Método #1: Estimación.

Si estás midiendo la longitud del sofá con una huincha métrica, entonces es muy probable que puedas hacer una estimación razonable acerca de la precisión de tus mediciones. Dado que la división más pequeña en la huincha de medida es de un milímetro, y un milímetro es también cercano al límite de nuestra habilidad para ver, tu sabes que no estarás haciendo mejor que ±1 [mm], ó 0.1 [cm]. Permitiéndonos alguna libertad en realizar las mediciones en forma directa, podría estimar nuestros errores aleatorios en algunos cuantos milímetros.

No es malo realizar estimaciones de vez en cuando, pero existen al menos dos formas en las que esto puede traerte problemas. Una es que los estudiantes tienen mucha fe cuando los aparatos de medición son sofisticados. Ellos piensan que una balanza digital debe ser *perfectamente exacta*, puesto que a diferencia de una balanza más rudimentaria con pesas movibles en ella, la medición se obtiene sin mediar el usuario. Eso es incorrecto. No existe medición alguna que sea perfectamente exacta, y si la balanza digital indica una medición a la décima de gramo, no hay forma que los errores aleatorios sean más pequeños que la décima de un gramo.

Otra forma de crear más problemas es tratar de estimar las barras de errores en un grupo de datos en bruto cuando realmente no tienes suficiente información para hacer una estimación inteligente. Por ejemplo, si estás midiendo el rango de un rifle, podrías disparar y medir cuán lejos alcanza a llegar la bala indicando hasta el centímetro más cercano, concluyendo que tus errores aleatorios fueron de ± 1 [cm]. Sin embargo, en la realidad, su rango podría variar aleatoriamente en algo así como 50 metros, dependiendo de todos los tipos de factores aleatorios que no conoces. En este tipo de situaciones, mejor te abstienes de usar algún método de estimación de errores aleatorios.

Método #2: Mediciones Repetitivas y Desviación Estándar.

El método para medir barras de error más ampliamente aceptado se llama Desviación Estandar. Usemos las mediciones del sofá para ejemplificar en qué consiste.

- Obtener el promedio de las mediciones.

Promedio = 203,1 [cm]

- Encontrar la diferencia o “desviación” de cada medición respecto del promedio.

Desviación [cm]
0,0
0,3
-0,3
0,2
0,1
0,3
0,0
-0,2
-0,2
0,0

- Calcular el cuadrado de cada desviación.

Desviaciones al cuadrado [cm²]
0,00

0,09
0,09
0,04
0,01
0,09
0,00
0,02
0,02
0,00

- Calcular el promedio del **cuadrado de las desviaciones**.

Promedio = 0,04 [cm²]

- Sacar la raíz cuadrada del resultado anterior. Ésta es la Desviación Estandar:

Desviación Estandar = 0,2 [cm]

Si hemos usado el símbolo x para la longitud del sofá, el resultado debería ser indicado como:

$$x = 203{,}1 \pm 0{,}2 \text{ [cm]} \quad (\text{o bien} \quad x = 203{,}1 \text{ [cm]} \quad y \quad \sigma_x = 0{,}2 \text{ [cm]})$$

Dado que la letra griega σ es usada como un símbolo para la desviación estandar, a menudo se llama a ésta una "sigma".

El paso (3) puede parecer un poco misterioso. ¿Por qué no saltárselo? Si así hiciéremos y seguimos de (2) directamente a (4), calculando simplemente el promedio de las desviaciones, terminaríamos con un promedio de ¡CERO! Si miras bien los datos en la tabla, las desviaciones siempre se van a cancelar cuando las sumas. Bien podrías tomar los valores absolutos antes de sumarlas, pero la gracia de seguir los pasos indicados es que corresponden a un método estandar que todos usan y por ende, sabrán cómo llegaste a tu resultado (además de que la desviación estandar tiene algunas simpáticas propiedades)

Sin embargo, un error común al usar la técnica de desviación estandar es aplicarla a un conjunto de muy pocas mediciones. Por ejemplo, alguien podría tener sólo dos mediciones para el largo del sofá, digamos 203,4 [cm] y 203,4 [cm]. La persona inferiría una desviación estandar de cero, lo que sería irrealmente pequeño debido a que se tienen las mismas mediciones.

Se usará desviación estandar como sinónimo de barras de error, aunque esto no signifique que debas usar siempre el método de la desviación estandar por sobre el de estimación o el de la regla de los dos tercios.

Probabilidad de las Desviaciones.

Tu puedes observar que aunque 0,2 [cm] es un buen valor para el tamaño típico de la desviación de las mediciones del largo de un sofá respecto del promedio, algunas de las desviaciones son más grandes y otras son más pequeñas. La experiencia nos indica que las siguientes estimaciones de probabilidad suelen ser ciertas dependiendo de con qué frecuencia resultan las desviaciones de distinta magnitud:

- resultado cae dentro de 1 desviación estandar respecto al promedio: 2 de 3 veces
- resultado cae dentro de 1 y 2 desviaciones estandar respecto al promedio: 1 de 4 veces
- resultado cae dentro de 2 y 3 desviaciones estandar respecto al promedio: 1 de 20 veces
- resultado cae dentro de 3 y 4 desviaciones estandar respecto al promedio: 1 de 500 veces

Precisión del Promedio.

Hemos decidido que la desviación estándar de nuestras mediciones de la longitud de un sofá fue de 0,2 [cm], es decir, la precisión de cada medición individual fue alrededor de 0,2 [cm]. Pero hemos dicho que el promedio, 203,1 [cm], fue más preciso que cualquiera de las mediciones individuales. ¿Cuán preciso es el promedio?

$$\frac{desviación \quad s\tan dard \quad de \quad una \quad medición}{\sqrt{numero \quad de \quad mediciones}}$$

Esto significa que, teóricamente, puedes medir cualquier cosa a cualquier precisión deseada con simplemente promediar un número suficiente de mediciones. En realidad, no importa cuan pequeño minimizas tus errores aleatorios, **NO** puedes deshacerte de los errores sistemáticos promediando, por lo que se llega a un punto en el que es inútil tomar más mediciones.

Propagación de Errores

Propagación del error en el caso de una variable.

Hemos estudiado técnicas para estimar los errores aleatorios en datos en bruto, pero lo que necesitamos ahora es saber cómo evaluar los efectos de esos errores aleatorios en los resultados finales calculados a partir de los datos en bruto. Por ejemplo, imagina que se te entrega un cubo hecho de un material desconocido y se te pide que determines su densidad. La densidad es definida como $\rho = m / v$ (ρ letra griega “rho”) y el volumen de un cubo cuyos lados son de longitud b es $V = b^3$ de manera que la fórmula:

$$\rho = m / b^3,$$

te dará la densidad si mides la masa y longitud de los lados del cubo. Si mides la masa de forma tan exacta como m = 1,658 ± 0,003 [g], pero sabes que b = 0,85 ± 0,06 [cm] con sólo dos dígitos de precisión, entonces tu mejor valor para ρ es 1,658 [g] /(0,85 [cm]) ^{3} = 2,7 [g/cm^3].

¿Cómo puedes saber cuán preciso es este valor de ρ? Nos hemos asegurado en dejar no más que dos cifras significativas para ρ , dado que el dato bruto menos exacto tiene tan solo dos cifras significativas. Es de esperarse que la última cifra sea incierta, pero no sabemos aún qué tan incierta. Un método sencillo para este tipo de situaciones consiste en alterar el dato en bruto en una sigma, recalcular el resultado y ver qué tanto cambia. En este ejemplo sumamos 0,06 [cm] a b para comparar:

con b = 0,85 [cm] nos da ρ = 2,7 [g/cm^3],
con b = 0,91 [cm] nos da ρ = 2,0 [g/cm^3].

El cambio resultante en la densidad fue de 0,7 [g/cm^3] y nuestra estimación corresponderá a:

$$\rho = 2,7 \pm 0,7 \text{ [g/cm}^3\text{]}$$

Las Barras de Errores no son límites absolutos.

¿Y qué sucede en el caso general en el cual ninguno de los datos brutos, usados en el cálculo, es claramente la fuente de error? Por ejemplo, imagina que obtenemos una medición más exacta del lado del cubo, b = 0,851 ± 0,001 [cm]. En términos porcentuales, las exactitudes de m y b son comparables por lo que ambas pueden causar errores significativos en la obtención de la densidad. En estos casos usaremos el siguiente método:

(1) Altera uno de los datos brutos, digamos m, en una desviación estándar y observa por cuánto cambia el resultado de ρ. Usa el símbolo ***Q***m para indicar el valor absoluto de ese cambio.

m = 1,658 [g] nos da ρ = 2,690 [g/cm³],
m = 1,661 [g] nos da ρ = 2,695 [g/cm³];

Qm = 0,005 [g/cm³].

(2) Repite el paso (1) pero alterando el otro dato bruto (en este caso le toca a b). Sea ***Q***b el cambio en ρ.

b = 0,851 [cm] nos da ρ = 2,690 [g/cm³],
b = 0,852 [cm] nos da ρ = 2,695 [g/cm³];

Qb = 0,009 [g/cm³].

(3) La Desviación Estándar de ρ se calcula mediante la expresión:

$$\sqrt{Qm^2 + Qb^2}\ ,$$

lo que nos arroja

$$\sigma_r = 0{,}01\ [g/cm^3]$$

Finalmente el resultado es:

$$\rho = 2{,}69 \pm 0{,}01\ [g/cm^3]$$