MAGNITUDES, MEDICIONES, ERRORES Y MODELOS MATEMATICOS

I. INTRODUCCION

La física está relacionada con nuestra vida de muchas maneras. Por ejemplo, se necesita saber física y/o aplicaciones de ella para:

a) Armar y poner en órbita un satélite de comunicaciones
b) Investigar "hoyos negros"
c) Construir y emplear en forma eficiente un equipo de tomografía o de ecotomografía, que permitirá escudriñar el cuerpo de una persona
d) Construir un computador
e) Detectar fallas en estructuras, por ejemplo imperfecciones en las soldaduras de las planchas de un barco
f) Diseñar y construir nuevos materiales
g) Estudiar la polución en el aire, la tierra y el agua
h) Reducir las vibraciones y los ruidos en los vehículos
i) Producir y ahorrar energía
j) Resolver crímenes
k) Diseñar plantas hidroeléctricas.

Como se ve, el estudio de la física no se puede separar del estudio del mundo que nos rodea, y sólo a través de ella se pueden responder interrogantes como:

a) ¿Por qué el cielo es azul pero se enrojece cuando se pone el sol?
b) ¿Cómo podemos evitar la muerte prematura de guaguas?
c) ¿Qué hace que el vidrio sea transparente?
d) ¿Qué es lo que mantiene las diferentes partes de los átomos juntas?
e) ¿Cómo se pueden predecir terremotos?
f) ¿Por qué se ven colores en una pompa de jabón?
g) ¿Por qué flota un barco?
h) ¿Cómo se puede corregir la escoliosis?

y muchas otras. Esta lista sólo puede dar apenas una idea acerca de las posibilidades que podría tener alguien que trabaja como físico.

Ahora, si Ud. quiere ser un físico debe estar preparado para investigar, observar, realizar experimentos, y transmitir los resultados de ellos. Debe ser capaz de desarrollar un espíritu creativo que le permita plantear ideas nuevas frente a un problema, y a la vez, explicarlas a otras personas para intercambiar opiniones y conocer sus puntos de vista. Debe estar preparado para renovar continuamente sus conocimientos en el mundo rápidamente cambiante de la tecnología y la ciencia, y debe adquirir suficiente habilidad matemática como para expresar los resultados obtenidos y sus ideas en términos precisos.

II. MEDICIONES BASICAS EN FISICA

El concepto científico de la Física es el de una ciencia empírica, lo que significa que sus teorías deben comprobarse mediante experimentos y usar sólo conceptos que son accesibles a la medición, es decir, la teoría debe basarse en lo que se pueda "conocer" directa o indirectamente a través de la medición. Sin embargo, esto no implica que una nueva teoría se deduce inmediatamente y en forma completa de datos experimentales. Como lo muestra la historia de la Física, el éxito de ella se explica por la interacción fructífera entre el experimento y la teoría, de manera que, basándose en la inspiración humana y en nuevos y sorprendentes descubrimientos experimentales, la teoría va siendo modificada excediendo el alcance para la cual fue diseñada originalmente, dando lugar a nuevos experimentos y descubrimientos.

II.1. Magnitudes y Cantidades

Las longitudes, las fuerzas, las superficies, las masas, los tiempos, en general, son ejemplos de magnitudes. La longitud de una mesa en particular, o el peso de un determinado cuerpo, o la superficie de un cuadrado particular, son ejemplos de cantidades. La longitud de un cuerpo concreto, determinado, es una cantidad; la longitud, en abstracto, sin referencia a una longitud particular, es una magnitud. La masa de un cuerpo particular es una cantidad; la masa en abstracto, es una magnitud física. Entonces se usará el término magnitud física con referencia a una cualidad de las cosas susceptible de ser medida y cantidad física al valor de esa cualidad, medido en la unidad que corresponda, en un caso particular.

En 1948 la novena Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM) en la resolución 6, encargó al Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM) "estudiar el establecimiento de un conjunto completo de reglas para las unidades de medida"; "para este propósito, averiguar, encuestando en forma oficial, la opinión de los círculos científicos, técnicos y educativos de todos los países" y "hacer recomendaciones para establecer un SISTEMA PRACTICO DE UNIDADES DE MEDIDA, susceptible de ser adoptado por todos los países signatarios de la Convención del Metro". En 1960 la 11ª CGPM adoptó para ese sistema de unidades el nombre de **Sistema Internacional de Unidades**, en forma abreviada SI y en 1971 la 14ª CGPM adoptó como unidades fundamentales las de las siete magnitudes siguientes: longitud, masa, tiempo, corriente eléctrica, temperatura termodinámica, cantidad de substancia e intensidad luminosa.

II.2. La Operación de Medir una Cantidad

Medir una cantidad A es compararla con otra cantidad U de la misma magnitud, a la que se llama <u>unidad</u>; ésta puede ser elegida arbitrariamente por el operador. La comparación se hace mediante un proceso que varía de acuerdo con la magnitud de que se trate. Para medir longitudes, por ejemplo se transporta la unidad sobre la cantidad a medir; para medir masas, se recurre a una balanza de brazos iguales; para medir la intensidad de corriente, se recurre al amperímetro y se compara directa o indirectamente el ángulo que gira la aguja con el ángulo que la haría girar una corriente de un ampère; para medir el tiempo con un reloj de aguja también se comparan ángulos; etc.

Simbólicamente, la comparación se indica por el cociente A/U. El resultado, que representa el número de veces que la cantidad contiene a la unidad, es el número real abstracto llamado medida de A con la unidad U:

$$A/U = X \text{ (número real abstracto)}$$

es posible expresar el valor de la cantidad:

$$A = X\,U \text{ (número real concreto)}$$

II.3. Los Sistemas que Intervienen en una Medición

En el proceso de medir intervienen:

a) Un sistema objeto de la medición: la cantidad a medir
b) Un sistema de medición: el equipo o aparato de medición y la teoría sobre la que fundamenta su funcionamiento.
c) Un sistema de referencia: la unidad empleada con la definición y el patrón correspondiente.
d) El operador: importante e ineludible participante del proceso, que es responsable de decidir si se han cumplido los <u>criterios de operación</u> para poder tomar las lecturas en la escala del instrumento.

Un ejemplo concreto sería: si se quiere medir el largo de un cilindro con un pie de metro, entonces:

a) El sistema objeto es la longitud del cilindro
b) El sistema de medición es el pie de metro y la teoría en que se basa el funcionamiento de él.
c) El sistema de referencia es el metro
d) Los criterios de medición son que:

    1) el cilindro esté colocado de modo que su longitud y el eje longitudinal del pie de metro sean paralelos
    2) la presión no sea excesiva.
    3) las superficies del cilindro y el pie de metro, en contacto, estén limpias
    4) la iluminación de la escala sea la apropiada
    5) la posición del observador con relación a la escala no provoque error de paralaje.
    6) la temperatura sea la apropiada, etc.

II.4. La definición de Magnitud Física

Se debe trabajar de modo que la operación de medir sea consistente consigo misma, es decir, que cada vez que se mida la misma cantidad en las mismas condiciones, los resultados estén dentro de ciertos límites. Para conseguir esto, hay que definir el procedimiento de interacción entre los sistemas a), b), y c) del proceso de medición enumerado más arriba y el observador con sus criterios.

Este tema ha preocupado bastante a los científicos y tecnólogos, y actualmente se acepta lo que se llama la "definición operacional" de la magnitud física:

La descripción del proceso de medir cantidades de una cierta magnitud, constituye la definición misma de esa magnitud.

II.5. La Apreciación de un Instrumento

Es la menor división de la escala de él. Una regla cuya menor división es 1 [cm] tiene una apreciación $\Delta x = 1$[cm]. Un cronómetro graduado a 1/5 de segundo, tiene una apreciación $\Delta t = 0.2$ [s].

II.6. La Estimación de una Lectura

Es el menor intervalo que un observador puede estimar con ayuda de la escala.

Por ejemplo, un observador trata de medir la longitud de una varilla con una regla con $\Delta x = 1$ [mm]. Haciendo coincidir lo mejor que puede una división de la regla con un extremo de la varilla, buscará la división de la escala que coincida con el otro extremo de ella. Lo más frecuente es que no coincida ninguna, y que el extremo de la varilla quede entre dos divisiones de la escala de la regla, como indica la figura 1.

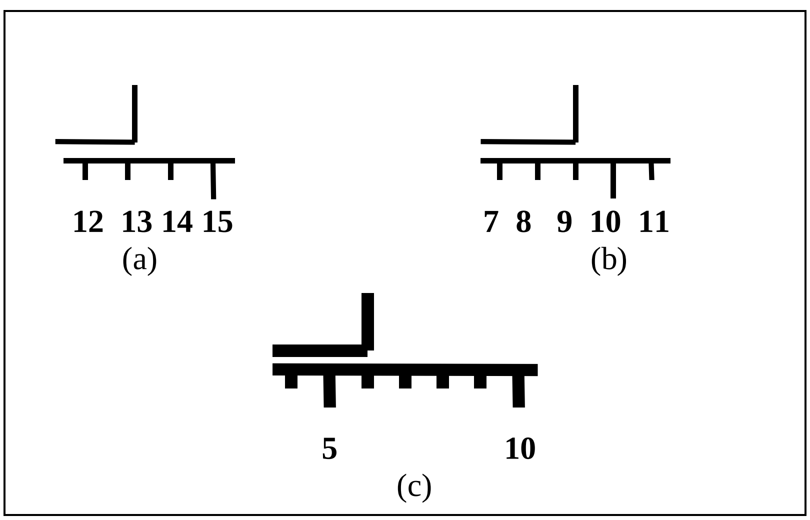

Figura1. La estimación de una lectura depende de la apreciación del instrumento y de la habilidad del operador.

En el caso de la figura (1a), se observa que la longitud no es 13 [mm] ni 14 [mm]. Por lo cual el observador trata de expresar esta situación escribiendo una cifra más, que no es leída, sino estimada por él "a ojo", escribiendo 13.3 [mm]. Con esa regla, el se siente capaz de distinguir entre 13.2 [mm], 13.3 [mm] y 13.4 [mm]; y elige como la mejor lectura 13.3 [mm]. Entonces la estimación de la lectura del observador, con esa regla y en esas condiciones, es 0.1 [mm].

En la figura (1b), se tiene una situación en que el mismo observador mide con una regla de la misma apreciación: $\Delta x = 1$ [mm]. Ahora lee 9 [mm] (ni 8 [mm] ni 10 [mm]); pero además "ve" (esto es una decisión personal del que está midiendo) que la lectura no es ni 8.9 [mm] ni 9.1 [mm]. Entonces escribe 9.0 [mm].

En la figura (1c), se presenta otra situación (que puede corresponder a una regla de trazos más gruesos, o a mala iluminación), en la cual sólo se puede decir si el extremo de la varilla que se quiere medir coincide o no coincide con una división de la regla. En casos como éste, la estimación de las lecturas es 0.5 [mm] (suponiendo que la apreciación de la regla era $\Delta x = 1$ [mm]). De lo anterior se podría establecer:

Cuando se realiza una medición, siempre se acepta una cifra correspondiente al menor intervalo que se puede estimar con ayuda de la escala del instrumento.

II.7. Unidades Básicas

Sin embargo, antes de la realización de cualquier medición, se deben definir las unidades que se emplean en ella.

Las unidades que se usarán en este texto pertenecen al Sistema Internacional de Unidades (SI), las cuales se basan en siete unidades básicas que se definen a continuación:

Metro (m): es la distancia recorrida por las ondas electromagnéticas en el espacio libre en $\frac{1}{299\,792\,458}$ de segundo.

Kilogramo (kg): es la masa que posee el prototipo internacional"kilogramo Patrón" que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, Francia.

Segundo [s]: es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado base del átomo de Cesio 133.

Ampère (A): es la intensidad de corriente constante que, al circular por dos conductores paralelos rectos de longitud infinita y de sección recta circular despreciable, colocados en el vacío a la distancia de 1 m.; produce entre ellos una fuerza de 2 x 10^{-7}[N] por metro de longitud.

Kelvin (K): es 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua, en el cual coexisten en equilibrio los tres estados de ella.

Candela: es la intensidad luminosa en una dirección dada de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 40 x 10^{12} [Hz], con una intensidad de 1/683 [Watt] por esteroradián.

Mol: es la cantidad de substancia de un sistema que contiene tantas partículas elementales como hay en 0.012 [gr] de carbono 12.

II.8. ALGUNOS INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN

Se considererarán aquí algunos instrumentos de medición típicos, aunque estos ya están siendo reemplazados por instrumentos digitales, algunos basados en otros principios.

II.8.1. Regla de Medir

Es uno de los aparatos de medición más simple que existe. Sus ventajas son: construcción barata y facilidad de uso. Puede dar resultados precisos hasta dentro de 1/5 [mm]. Sin embargo, para conseguir esta precisión se deben evitar ciertos errores.

- Error de Paralaje. Si hay una cierta distancia entre el objeto que se está midiendo y la regla, y además, la línea visual no es perpendicular a la regla, la medición obtenida es incorrecta. Ver figura (2a). Este error se llama **error de paralaje** y de hecho puede ocurrir no solo en una regla, sino que en todos los instrumentos en que hay una aguja que se mueve sobre una escala. Se puede reducir colocando el objeto o puntero tan próximo a la escala como sea posible, o bien colocando un espejo paralelo a la escala como se muestra en la figura (2b).

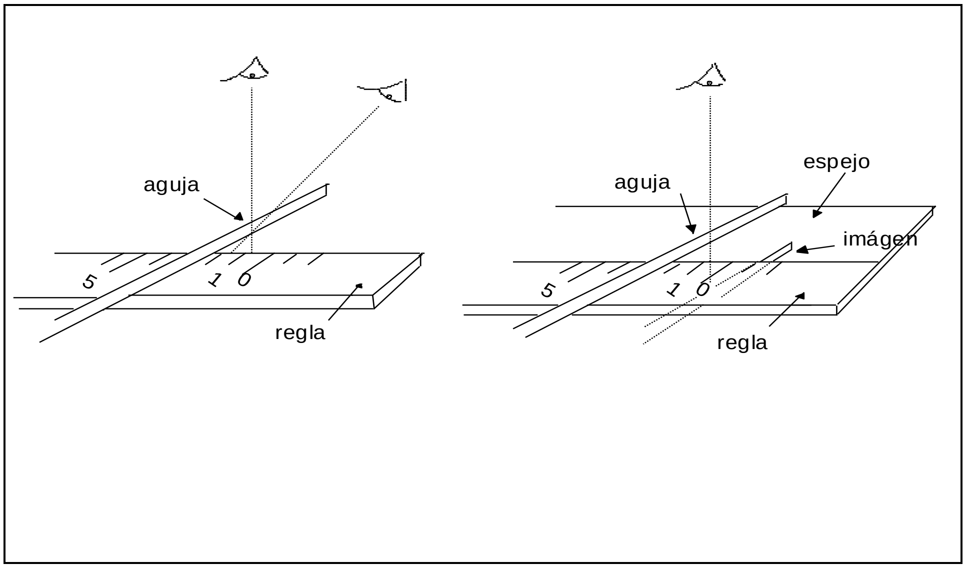

Figura 2. Esquema para muestra el error de paralaje

Alineando la imagen del ojo con el objeto (o la aguja con su imagen) se consigue que la línea visual forme un ángulo recto con la escala.

- Error de cero. No es buena práctica alinear el extremo de la regla con un extremo del objeto y tomar una lectura en el otro, figura 3a, salvo para medidas aproximadas. Por el contrario, el objeto se debería colocar de modo que se puedan tomar lecturas en ambos extremos, figura 3b. Esta práctica es conveniente debido a que el extremo de la regla podría haberse gastado o falseado la posición del cero por cualquier causa. En general se debe considerar sospechosa la posición de cero de cualquier instrumento. Este tipo de error se puede evitar generalmente por una técnica simple de sustracción como la mostrada.

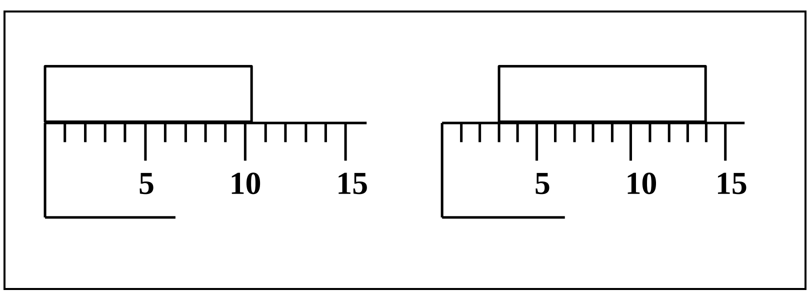

Figura 3. Eliminación del error de cero.

- Calibración. La escala de la regla podría estar incorrectamente marcada. Por lo tanto, la regla se debe comprobar o calibrar. Esto se consigue simplemente colocando la escala de ella junto a la de una regla patrón más precisa, anotando las lecturas correspondientes y construyendo una curva de calibración.

Es importante darse cuenta de la razón de esto. Una regla de medir ordinaria es barata porque está hecha de material barato (madera o plástico), y su escala ha sido grabada sin demasiado cuidado. En una regla de madera, la graduación posiblemente es buena hasta alrededor de 1/2 [mm], en toda su longitud, (las reglas de plástico son mucho peores que esto, generalmente el error es del orden del 1%). Las reglas patrón son de alto costo. En un país como el nuestro en que se usarán reglas de madera o plástico es posible hacer mediciones de precisión con ellas si se calibran con respecto a un patrón. Si se usa sólo una parte de la regla en un experimento dado, la comparación con el patrón debe hacerse con especial cuidado en la parte que se ha usado.

Actividad 1.

a) Empleando una regla de plástico y una regla que se considere patrón construya una tabla de valores de calibración. Construya un gráfico de calibración.
b) Usando el gráfico y la regla de plástico mida diferentes objetos. Evite errores de paralaje y de cero. En cada caso anote junto al valor obtenido la estimación de la lectura que hizo.
c) El error de una lectura sería la diferencia entre la lectura y el valor "verdadero", suponiendo que existe. Considere que la estimación de la lectura corresponde al error que se ha cometido al efectuar la medición.
d) Si se llama error relativo al cociente entre el error y el valor de la cantidad medida, en las mismas unidades. ¿Qué dice más sobre la medición: el error o el error relativo? Justifique.

II.8.2. El Vernier

Es una pequeña reglilla que, adosada a otra escala, permite la medición de distancias de hasta unos 15 [cm] con una exactitud de alrededor de una décima de [mm]. Se supondrá aquí que la longitud del intervalo correspondiente a N divisiones de la escala está dividida en n = N + 1 partes en el vernier.

Si d es el tamaño de la menor división de la escala y v el de una división del vernier se tiene:

$$v = \frac{N\,d}{N+1}$$

luego:

$$nv = Nd$$

La menor magnitud δ que se puede medir con el vernier, corresponde a la diferencia entre los valores de una división de la escala y una del vernier, o sea:

$$\delta = d - v$$

Lo cual lleva a que:

$$\delta = \frac{d}{n} \qquad [1]$$

O sea la menor longitud que se puede medir con la escala, con vernier, es igual al cociente del valor de la división de la escala por el número total de divisiones del vernier.

Actividad 2.

a) Construya con cartón delgado o cartulina un vernier que le permita medir a la décima de [mm]. en conjunto con una regla milimétrica (use una las reglas patrón del laboratorio para calibrar la regla milimétrica).

b) Estime cómo y de qué tamaño debería ser un vernier, para poder medir 1/100 de [mm] con él y una regla milimétrica.

II.8.3. El tornillo micrométrico o Palmer

Permite medir longitudes del orden de algunos milímetros con una exactitud de alrededor del centésimo de milímetro. Son tornillos de paso pequeño pero constante que giran arrastrando un tambor graduado que permite apreciar fracciones de vuelta. Cuando el tambor gira una vuelta, el tornillo avanza una distancia conocida **p**, que se denomina **paso del tornillo**. Si el cuerpo del tambor tiene n divisiones, la menor longitud que se puede medir sería:

$$\delta = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{n}} \qquad [2]$$

En este instrumento es necesario conocer el error de cero, es decir, la lectura correspondiente a espesor cero.

II.8.4. El Cronómetro

El Cronómetro es un instrumento que se usa para medir intervalos de tiempo. Se puede detener o poner en marcha eléctricamente o bajo el control de un botón.

En los experimentos asociados a este texto puede que se emplee un microcomputador para medir intervalos de tiempo. Sin embargo vale la pena decir algo acerca de los cronómetros porque ello permitirá la introducción de otras ideas. Estos instrumentos, en general, son de gran precisión y gran exactitud. La precisión se debe a que marcan los segundos con gran regularidad y la exactitud es porque el error relativo porcentual puede ser tan pequeño como de 10[s] en un mes, lo que corresponde a un error relativo porcentual de:

$$\frac{10}{24x60x60x30}100 \approx 0.0004\%$$

Por lo tanto, la exactitud de un buen cronómetro es normalmente más alta que la de los demás instrumentos de laboratorio sobre todo, si tomamos en cuenta que si adelanta o atrasa, normalmente lo hará en forma consistente y uniforme.

Entonces, al usar un cronómetro se podrá, en general, dar por descontado que tiene más exactitud que la que necesitamos en el laboratorio. Pero la precisión al usarlo es otra cosa. La precisión de la medición va a depender del error que se cometa al poner en marcha y detener el instrumento. Por motivos de variaciones en el tiempo de reacción del experimentador, el error en las primeras mediciones que usted hará será del orden de 0.5 [s] y cuando tenga más práctica de 0.3 [s]. Es casi imposible lograr un error tan bajo como 0.1 [s], con un cronómetro corriente.

Para los fines de esta discusión vamos a suponer que el error al poner en marcha y detener el cronómetro es del orden de 0.3 [s]. En este caso, el error porcentual en la medición de un segundo es de 0.3/1 = 0.3, o sea 30 % y de poco sirve la exactitud del instrumento en estas condiciones.

Luego, si se pretende realizar una medición con una precisión del 1% se debe medir un intervalo mínimo de 30 segundos. Por ejemplo, si se desea medir el período de un péndulo, el cual es del orden de 2[s], deberá medirse el tiempo empleado en a lo menos quince oscilaciones, para así medir intervalos mayores de 30[s]. Siempre que se den las condiciones para que las oscilaciones sean todas de "igual" duración.

Entonces, al usar un cronómetro se trata de medir tiempos relativamente largos, adoptando así, un método que permite que el error del operador sea el mínimo posible. Por ejemplo, si usted y otro alumno van a medir la duración de cierto fenómeno, usted opera el cronómetro mientras él controla el equipo. Sería una equivocación que uno diera la señal de partida y el otro la de detención ya que los tiempos de reacción, por ser diferentes, introducen un error que disminuirá si ambas instrucciones las da la misma persona para la cual suponemos el mismo tiempo de reacción.

Actividad 3.

a) Amarre una tuerca de un hilo y cuélguelo de un clavo, de modo que el largo sea aproximadamente de 1 [m].
b) Mida el período de oscilación del péndulo con una precisión del 0.5 %. ¿Cómo lo hizo? ¿Por qué?

II.8.5. La Balanza

Es un instrumento que se usa para medir masa, la figura 4 es un esquema de una balanza típica.

La balanza puede ser un instrumento muy delicado y de gran precisión, en ese caso, para su uso se deben seguir las siguientes reglas

- Al mover el tornillo o palanca que hace bajar el sostén de la cruz, dejándola en libertad, se debe proceder evitando movimientos bruscos que pueden sacar de su sitio las cuchillas de apoyo de la cruz o la de los platillos.
- No se deben colocar ni sacar masas de los platillos sin llevar previamente la cruz al estado de reposo moviendo con suavidad el tornillo o palanca que levanta el sostén.
- Las pesas no se deben tocar con las manos para que la masa de ellas no cambie.
- Se debe evitar la agitación del aire cerca de los platillos teniendo en lo posible cerrada la o las puertas de vidrio de la caja de la balanza.
- Antes de empezar a masar, la balanza debe estar nivelada y equilibrada.
- El proceso para determinar la masa, desconocida consiste en un "horquillamiento" de ella: al agregar "pesas" se trata de encontrar una de mayor masa y una de menor masa para determinar el rango en que está la desconocida. Este rango, se va haciendo cada vez más pequeño hasta obtener la masa con la exactitud deseada.

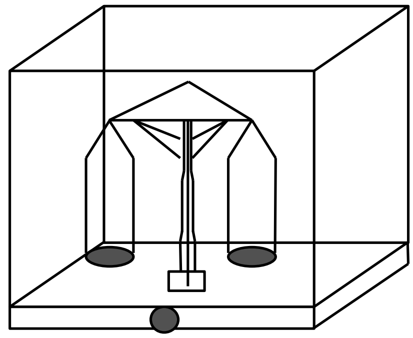

Figura 4. Esquema de una balanza.

Hoy en día lo más usado son balanzas de tipo electrónico.

III. ERRORES

Cualquier experimento implicará una serie de mediciones, y cada una de ellas se hará con un cierto grado de exactitud. Por ejemplo, si se desea determinar una rapidez es necesario medir un intervalo de tiempo y una distancia. El buen uso de un cronómetro y una regla métrica le permitirán medir el tiempo y la distancia con errores de algunas décimas de segundo y algunas décimas de [mm], respectivamente.

Hay dos tipos básicos de errores que pueden aparecer en el resultado: sistemáticos y aleatorios. Estos últimos a veces también se denominan accidentales, casuales o por azar. Generalmente se asocia al primer tipo la palabra "**exactitud**" y al segundo la palabra "**precisión**".

III.1. Errores sistemáticos

Son aquellos de valor constante o que responden a una ley conocida, y por lo tanto son corregibles. A veces pueden ser eliminados o reducidos realizando las correcciones apropiadas, o pueden ser determinados experimentalmente o anulados realizando el experimento de modo que se eliminen sus efectos. En general, son errores hasta que son detectados y se corrigen.

A este tipo pertenecen, por ejemplo, los errores de calibración de escalas, el atraso o adelanto de un reloj de acuerdo a un ritmo conocido. Errores debido a la expansión de la regla de medida con la temperatura, etc. Otros ejemplos, son los errores en las divisiones de escalas graduadas en los instrumentos, la excentricidad de círculos graduados, que deberían ser concéntricos, la desigualdad de los brazos de una balanza etc. También hay errores de este tipo que se deben a peculiaridades del observador, el cual puede responder a una señal demasiado tarde o demasiado pronto, o puede estimar siempre una cantidad menor de lo que es, etc. El carácter y magnitud de estos errores "personales", se puede determinar mediante un estudio del observador.

III.2. Equivocaciones

Estrictamente hablando, las equivocaciones no son errores, pues no ocurren cuando el observador tiene suficiente cuidado, mientras que los errores no pueden ser eliminados sólo teniendo cuidado. Sin embargo, los mejores observadores ocasionalmente relajan su vigilancia y se equivocan. Generalmente estas equivocaciones pueden ser detectadas si todas las observaciones se anotan sin alteraciones directamente en las tablas de datos. Algunos ejemplos son, la confusión de la cifra 8 con la 3 y viceversa, un ángulo de 52° se puede leer 48° cuando el observador nota que la lectura está a dos grados de 50°. Tales equivocaciones corrientemente son obvias en los datos originales, pero, pueden no serlo tanto si se han anotado resultados de cálculos en lugar de ellos. Por esta razón es imperativo anotar las lecturas, no los resultados de operaciones entre ellas. Es también importante evitar borrar cualquier anotación que pueda parecer que está mala, ya que después puede resultar buena; es mejor trazar una línea sobre ella para indicar el deseo de rechazarla.

III.3. Errores Aleatorios (casuales)

Los errores aleatorios se deben a causas irregulares. Estos errores aparecen más claramente cuando se realizan mediciones precisas, pues cuando los instrumentos se construyen o se ajustan para medir cantidades pequeñas, las fluctuaciones en las observaciones se hacen más notables. Por ejemplo, si se desea medir la longitud de una barra con una regla graduada en decímetros, no habría excusa para que una lectura difiriera de otra, cualquiera sea el número de veces que se realice la medición. En cambio si uno intenta medir la longitud de la misma barra con una regla graduada en [mm] apreciando algunas décimas de [mm], las observaciones individuales seguramente diferirán entre sí, siempre que se realicen con cuidado y sin prejuicio.

Es muy frecuente tomar como punto de partida la hipótesis de que existe un "valor verdadero" de la cantidad que se quiere medir, y que el proceso de medición tiene por objeto determinar ese valor verdadero, tan aproximadamente como sea posible.

Pero... ¿existe realmente el valor verdadero? Si por ejemplo se trata de la longitud de una varilla, ¿está bien definida esa longitud? Geométricamente, ¿son las bases estrictamente paralelas?. Y ¿qué decir de las fluctuaciones térmicas en las posiciones de los átomos individuales en los extremos?. En general ¿qué decir de las modificaciones que se están produciendo en el sistema que se está midiendo por el hecho de que el observador está interaccionando con él?. Como se ve, el tema es campo para discusiones.

La conclusión a que se llega es que no es posible, en general, atribuir a la cantidad física que se desea medir un "valor verdadero" absolutamente exacto. De hecho, no existen procedimientos de medida absolutamente perfectos, que se puedan repetir un número indefinido de veces en condiciones rigurosamente iguales. Por otra parte, todo instrumento de medida permite efectuar lecturas dentro de ciertos límites y no es posible construir ningún aparato que pueda efectuar mediciones con errores menores que un determinado valor.

De lo anterior, se infiere que en el proceso de medición de las distintas cantidades físicas, a lo más que se puede aspirar es a determinar, de la mejor manera posible, "el valor más probable" o la "mejor estimación" que de dicha magnitud se pueda hacer, teniendo en cuenta el conjunto de datos de que se dispone, y a cuantificar las imprecisiones, o sea los límites probables de error de dicho valor, que se puedan también determinar a partir de ellos. Si hay algo que se pueda considerar el "valor verdadero" de una cantidad, es el valor de ella, x_o, medido por distintos métodos que arrojan valores tales que la imprecisión obtenida es muy pequeña.

III.4. El Valor más Probable y la Imprecisión de él

El conjunto de datos que se ha tomado de la cantidad física a medir es una "**muestra**", en el sentido estadístico de la palabra. Suponiendo que la distribución de los errores de la cantidad en cuestión es "normal" o "Gaussiano", se puede demostrar, que el promedio de la muestra, que se anotará M, es el valor más probable de la cantidad física. Si los valores de los elementos de la muestra se representan por x_i. La expresión matemática para M es:

$$M = \frac{\sum x_i}{n} = M_x \qquad [3]$$

Pero, aparte de la mejor estimación, interesa conocer la imprecisión en ese valor. Esto se expresa por los límites entre los cuales estará la cantidad medida con una cierta probabilidad. Esta información la proporcionará una magnitud estadística que mida la dispersión de los datos de la muestra. Pero hay dos cantidades que hacen esto: una es la desviación estándar de la muestra, y la otra el "**error del promedio**".

La desviación estándar de la muestra, que mide la fluctuación de los datos se anotará, "s", y se calculará haciendo uso de la relación:

$$s = \left[\frac{\sum (x_i - M)^2}{n} \right]^{1/2} \qquad [4]$$

Otra expresión, a veces más conveniente para calcular "s" es:

$$s = \left[\frac{\sum (x_i)^2}{n} - \left[\frac{\sum x_i}{n} \right]^2 \right]^{1/2} = \left[M_{x^2} - M_x^2 \right]^{1/2} \qquad [4']$$

siendo M_{x^2} el promedio de los x_i^2 y M_x el promedio de los x_i. El error del promedio de la muestra se anotará, "s_M", y se calcula de la relación:

$$s_M = \frac{s}{(n-1)^{1/2}} \qquad [5]$$

Se puede demostrar que el error del promedio es la desviación estándar de la distribución de los promedios de las muestras, todas iguales de n elementos. Esto significa que si se hacen M×N lecturas de la misma cantidad, al hacer M grupos de N elementos los correspondientes promedios fluctúan en un intervalo aproximadamente $(n)^{1/2}$ veces menor que los datos. O sea, que:

El promedio es una cantidad univocamente definida por los datos, cuya fluctuación, definida por [5] es aproximadamente $(n)^{1/2}$ veces menor que la fluctuación de las lecturas, que está medida por [4].

Como ya se ha dicho, no se puede obtener con precisión absoluta el valor buscado de la cantidad física que se está midiendo, por lo tanto se renuncia a hacerlo y sólo se da M, el valor de la mejor estimación y los límites entre los cuales estará esa cantidad con una cierta probabilidad. Es decir:

$$x = M \pm s_M \qquad [6]$$

ó

$$x = M \pm \frac{s}{(n-1)^{1/2}} \qquad [6']$$

Estas dos últimas expresiones dan el intervalo en que se encuentra el valor buscado con una probabilidad de un 68 %. Interpretaciones de las dos últimas expresiones, que quizá aclaran el significado de ellas serían:

$$M - s_M < X < M + s_M \qquad [7]$$

o bien:

$$M - \frac{s}{(n-1)^{1/2}} < X < M + \frac{s}{(n-1)^{1/2}} \qquad [7']$$

<u>Actividad 4.</u>

a) Calcule M y s para el juego de datos:

x = 3.20; 2.93; 3.11; 2.29; 3.05; 2.92; 2.95; 3.05; 3.04; 3.01

b) Calcule M y s para el juego de datos:
x = 2.45; 2.40; 2.53; 2.75; 3.05; 2.50; 2.55; 3.00; 2.80; 2.85

c) Escriba para los problemas a) y b) los límites del intervalo en que se encuentra el valor de la cantidad X con una probabilidad 0.68 (o sea en un 68% de los casos).

El mejor valor de la variable X se encontrará con una probabilidad del orden de 0.95 en el intervalo $M \pm 2\ s_M$.

d) Con este nuevo antecedente, escriba para los problemas a) y b), los límites del intervalo en que se encuentra el valor de X con un 95 % de probabilidad.

El mejor valor tiene una probabilidad 0.9987 de encontrarse en el intervalo $M \pm 3\ s_M$.

e) Con este nuevo antecedente, escriba para los problemas a) y b), los límites del intervalo en que se encuentra el valor de X con un 99.87 % de probabilidad.

f) ¿Cuántas mediciones se deberían hacer para que la estimación del error del promedio sea 1/10 del obtenido en el problema a)?

III.5. Una medición, varias mediciones

En el párrafo anterior se ha visto como determinar, a partir del conjunto de datos, el valor más probable y los límites entre los que estará la cantidad con una cierta probabilidad cuando se hacen varias mediciones de una misma cantidad. A propósito de esto surgen dos preguntas:

a) ¿Cómo proceder si dada la precisión con que se desea efectuar la medición de una cantidad dada, la realización de una sola medición basta para obtener dicha precisión?
b) Como es claro de las expresiones [5] y [7] que la precisión se puede aumentar midiendo un mayor número de veces la cantidad en cuestión? ¿Cómo se determina el número de veces que se debe efectuar la medición para obtener una precisión dada?.

III.5.1 Una sola medición

El valor de la mejor estimación de la cantidad es igual al valor de la cantidad medida una sola vez. Los límites entre los cuales estará la cantidad será determinado, II.6, por la cifra correspondiente al menor intervalo que se puede estimar con ayuda de la escala del instrumento.

Por ejemplo, si se desea una precisión del 1 % en la medición de una longitud de 13.45 [cm], y se está midiendo con una regla graduada en [mm], pero en que las condiciones de la medición son como las indicadas en la figura 1 c). Entonces el resultado será 13.45 ± 0.05 [cm].

III.5.2 Número de veces que se debe efectuar una medición para obtener una precisión dada.

Muchas veces interesa la exactitud relativa en vez de la exactitud absoluta. Un error de 0.5 [cm] en la medición de 10. [cm] representa una exactitud muy inferior a un error de 0.5 [cm] en la medición de una longitud de 100. [m].

El error relativo se determina haciendo el cuociente entre el tamaño del error (valor absoluto) y el tamaño de la medición misma y corrientemente se expresa en tanto por ciento y entonces se denomina error porcentual; el error de 0.5 [cm] al medir 10. [cm] representa un error porcentual de 5% y el error de 0.5 [cm] al medir 100.[m], representa un error porcentual de 0.5%.

Si se desea medir la longitud de un objeto de alrededor de 10. [cm] con una precisión del 0.1% con una regla milimétrica se debe proceder de la siguiente manera:

Suponga que la regla que se está usando y las condiciones en que se está trabajando llevan a estimar que el error de una medición es del orden de 0.3 [mm]. Entonces el error porcentual es 0.3%.

$$\frac{0.3\ [\mathrm{mm}]}{100\ [\mathrm{mm}]} = 0.003 = 0.3\%$$

Como se pretende una precisión del 0.1% habrá que hacer un cierto número de mediciones de la longitud independientes entre si. Para que sean independientes es necesario que cada vez que se efectúa una medición hay que dejar que el resultado tome el valor que corresponda (sin que los valores anteriores influyan sobre el valor que se asigna a la nueva medición).

La determinación del número de veces que hay que repetir la medición se basa en el hecho que:

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Además, se sabe que la mejor estimación de σ_M en términos de s, o sea en términos de la desviación estandar de la muestra es:

$$s_M = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

Entonces se puede escribir:

$$\text{Error del promedio} = \frac{\text{error de una medicion}}{n-1^{\frac{1}{2}}}$$

Esta misma expresión se puede escribir en términos de errores relativos dividiendo por la mejor estimación del valor buscado. En esta última forma se tiene:

$$0.001 = \frac{0.003}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}$$

De lo cual resulta n = 10.

En consecuencia se puede afirmar que para disminuir el error estándar (o sea para aumentar la precisión), se puede aumentar el número de mediciones. Sin embargo, muchas veces es preferible buscar un instrumento y/o un método de medición más preciso que el anterior, en lugar de aumentar más y más el número de mediciones, ya que mientras más grande es este número, más difícilmente ellas se realizaran en las mismas condiciones.

Si se está usando el mejor método o instrumento disponible entonces se estima s, con un pequeño número de medidas (por ejemplo 5) y se calcula cuantas medidas hay que hacer para aproximarse a la precisión deseada en el resultado final.

En todo lo anterior se ha supuesto que no hay errores sistemáticos.

III.6. Precisión y Exactitud

Para aclarar un poco más las ideas sobre errores aleatorios y errores sistemáticos, como también el sentido en que se usan las palabras precisión y exactitud, en la figura a continuación se ilustrarán diferentes situaciones que se pueden presentar. Se supondrá que x_o es el valor "verdadero" de la cantidad en cuestión, y M_x el valor más probable obtenido de los datos.

Las pequeñas cruces de la figura 5, representan la posición de los valores medidos de la variable x.

La figura 5a representa mediciones de poca precisión pero buena exactitud, ya que "s" es grande y el error sistemático es pequeño.

La figura 5b representa mediciones de poca exactitud pero buena precisión, ya que "s" es pequeño y el error sistemático es grande.

La figura 5c representa mediciones de buena precisión y buena exactitud.

La figura 5d representa mediciones de poca precisión y poca exactitud.

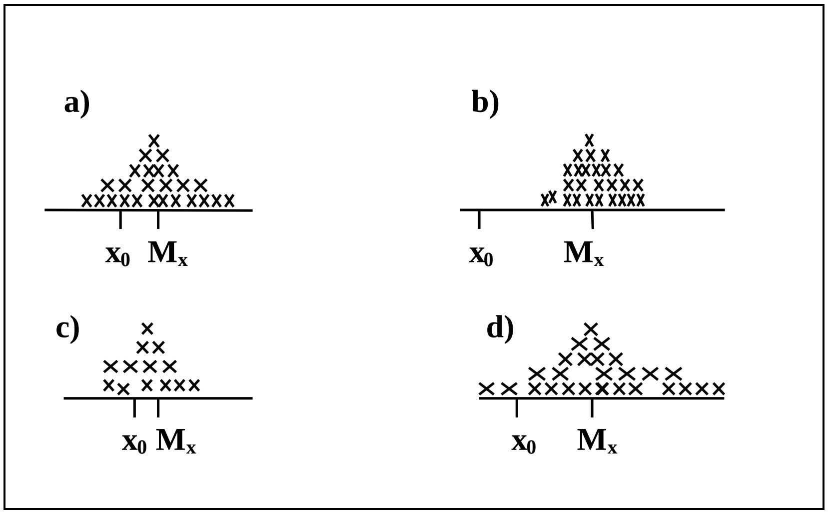

Figura 5. Errores, precisión y exactitud.

Note que en realidad no se conoce x_o y por lo tanto no se puede saber si los errores sistemáticos son grandes o pequeños.

III.7. EXACTITUD DE LAS LECTURAS

La exactitud con la que se puede anotar una lectura dependerá de la apreciación de la escala en el instrumento de medida. Es incorrecto, más aún, deshonesto para un científico, dar resultados con más exactitud que la apropiada. Y por ello éste no es un problema trivial, especialmente cuando se trata de una cantidad derivada de otras y la respuesta final resulta de operaciones entre un cierto número de cantidades diferentes.

Se comenzará con un ejemplo simple: si un individuo mide la longitud de un objeto con una regla y el resultado es 6.8 [cm], entonces se supone que el que hizo la medición, era capaz de apreciar hasta ± 1 [mm], ya que esa es la última cifra en la respuesta. Esto significa que la lectura es exacta hasta 1 parte en 68, o sea, aproximadamente 1.5 % . Ahora, si esa lectura forma parte de un experimento en que intervienen otras magnitudes, será conveniente que las otras cantidades se midan con exactitudes similares ya que el resultado quedará determinado por aquella cantidad que tenga la menor exactitud. Por ello, en cualquier experimento, se debe prestar atención a cuáles cantidades serán medidas con menos exactitud.

III.7.1 La Escritura de una Respuesta

Cuando se están tomando las lecturas relativas a un experimento, hay que tener cuidado al escribir los resultados. Seguramente se usará una calculadora para determinarlo a partir de una fórmula que contiene, quizá, tres o más cantidades diferentes. La calculadora dará una respuesta con nueve o doce dígitos, pero no se debe usar el total de las cifras en la respuesta. La exactitud de ella es siempre menor, o a lo más igual, que la menos exacta de las cantidades que han intervenido.

III.7.2 Cifras Significativas

Cuando se desea determinar la exactitud que se espera de un cálculo en que están envueltas cantidades experimentales, el concepto de cifras significativas es muy útil. Suponga que varias personas, al medir el largo de una hoja de papel con una regla graduada en [cm], entregaron los siguientes resultados: 32.512 [cm]; 32.51 [cm]; 32.5 [cm]; 32.5118 [cm]; 32.51000 [cm]; 32. [cm].

De acuerdo con las limitaciones impuestas por el instrumento. ¿Cuál es a su parecer la respuesta más honestamente acertada? Repase el apartado II.6, sobre todo la regla al final de él. De acuerdo a este nuevo antecedente, ¿cuál es ahora la respuesta más acertada?.

DEFINICION: **En un número cualquiera, el número de cifras significativas es el número de dígitos sin contar el (o los) cero [s] en el extremo izquierdo, si es que hay. Si el número es entero, hay que dejar claramente establecido que ha sido obtenido a partir de una medición experimental mediante un punto**.

Por ejemplo, los números 8.4; 75.; 0.0019 tienen sólo dos cifras significativas.

La última cifra con algún significado, último dígito significativo, es la última cifra a la que el experimentador se atreve, honestamente, a darle un valor.

Como el resultado que se obtiene al medir la hoja con una regla graduada en centímetros, sólo se puede dar hasta la décima de centímetro, entonces, cualquier medición de ella con este instrumento sólo se podrá dar con tres cifras significativas.

Hay que hacer notar que cuando se expresan números con cierta unidad, esto no implica necesariamente que él o los instrumentos con que se efectuó o se efectuaron la o las mediciones, estén graduadas en dicha unidad.

También se encuentran en Física números adimensionales, los cuales deben ser considerados con un determinado número de cifras significativas.

Ejemplos de números que tienen 2 cifras significativas

5.3	0.040
0.12	40.
1.4	4.0×10^{1}
1.4×10^{-2}	0.40×10^{2}

Otros ejemplos:

101.0	4 C.S.
100.	3 C.S
2.0530	5 C.S
100	(N° no obtenido de medición experimental)

En literatura técnica y científica los números se consideran pertenecientes a 3 tipos diferentes con respecto a la exactitud:

1.- Números obtenidos de datos experimentales que se escriben con tantos dígitos como lo justifica la exactitud de su determinación.

2.- Números exactos, como el 1/2 en la fórmula de la energía cinética 1/2 mv^2 o como el 4 en la fórmula para el área de una esfera, $4 \pi r^2$. Tales números se escriben siempre como se ha hecho aquí pero, se tratan en los cálculos con tantas cifras decimales como se necesite. El número π también cae en esta clasificación.

3.- Números ilustrativos como los que aparecen en los problemas de los libros. Estos números vienen generalmente de experimentos imaginarios y se eligen con valores tales que los cálculos resulten sencillos.

III.7.3. Redondeo de Números

Cuando se redondea una cantidad a un determinado número de cifras significativas se debe seguir las siguientes reglas:

1. **Si la cifra que se descarta es mayor que 5, o 5 seguido de cualquier dígito distinto de cero, entonces, la cifra retenida aumenta en una unidad**.

2. **Si la cifra que se descarta es menor que 5, entonces la cifra adyacente retenida no se altera**.

3. **Si la cifra que se descarta es 5 o 5 seguido de cero [s], y la cifra adyacente retenida es impar, ésta aumenta en una unidad, pero si era par, permanece sin alterar**.

Ejemplos: Las listas de números de las primeras columnas aparecen redondeadas a tres cifras significativas en las segundas.

4.557	4.56	4.5551	4.56
4.564	4.56	4.555	4.56
4.5650	4.56	4.56001	4.56

III.7.4. Exactitud Decimal

Si se hace una afirmación en relación, a una medida, esta afirmación debe ser exacta hasta donde sea posible, y debe llegar lo suficientemente lejos para expresar la exactitud de la medición. Si se considera que la "incerteza en un número", corresponde a una unidad de la última cifra significativa. "12.8 [cm]" significa una longitud que está más cerca de 12.80 [cm] que de 12.70 o de 12.90 [cm]. Es decir, el valor medido está entre 12.75 y 12.85 [cm]; cuya diferencia corresponde a una incerteza de 0.1 [cm], y no entre 12.7 y 12.9, que corresponde a una incerteza de 0.2 [cm]. De este modo, el valor redondeado debería ser 12.8 [cm] y no 12.7 o 12.9 [cm]. Por ello se puede decir que 12.8 [cm] significa una longitud que está más cerca de 12.80 [cm] que de 12.75 [cm] ó 12.85 [cm]. De igual modo, si una longitud se escribe "12.80 [cm]", eso implica que se ha medido a la centésima de cm y se ha encontrado que la lectura está entre 12.795 y 12.805 [cm], así que se ha podido redondear en forma apropiada a 12.80 [cm].

III.7.5. Reglas para Operar con Cifras Significativas

1. **Para sumar o restar cantidades físicas, todos los números deben ser redondeados, de modo que queden con el mismo número de <u>cifras decimales</u>**.

2. **Para la multiplicación, división, potenciación y radicación la respuesta se anota con tantas cifras significativas (o a lo sumo, una cifra más) como hay en el número menos confiable que interviene en dicha operación**.

La regla 2 se basa en el hecho de que el número de cifras significativas de una cantidad es una medida tosca del porcentaje de exactitud de ella. La regla sugiere retener una cifra significativa extra como una medida de protección, ya que el concepto de cifra significativa no es suficientemente exacto para todos los propósitos. Esto se ve en el ejemplo que sigue: Dividir 99.8 por 9.94. Si se considera la "incerteza" en un número como una unidad en la última cifra significativa, el número 99.8 estaría entre 99.75 y 99.85, que corresponde a una incerteza de 0.1%. El resultado del cociente sería 10.04, no 10.0, ya que las incertezas de 99.8, 9.94 y 10.04 son todas de 0.1 %, mientras que la incerteza en 10.0 es 1 %. Como otro ejemplo nótese que 11.1, 23.2, 45.1, 72.8 y 98.2 tienen tres cifras significativas pero las incertezas son aproximadamente 1, 0.4, 0.2, 0.13 y 0.1 % respectivamente. Este ejemplo muestra que para un grupo de cantidades que tienen el mismo número de cifras significativas, la cantidad que tiene el primer dígito menor es la que tiene el mayor porcentaje de inexactitud. La regla 2, se aplica menos exactamente a la operación de potenciación que a las otras operaciones. Esto se debe al hecho de que si se eleva una cantidad a la potencia n, el porcentaje real de incerteza en el resultado es n veces mayor que para la cantidad original.

Ejemplos:

	2.1	2.1	25.31 x 4.2
	13.187	+ 13.2	5062
	3.22	3.2	9124
		18.5	106.302
Las respuestas son:		**18.5**	**106.3**

Actividad 5.

a) Indique cuántas cifras significativas tiene cada uno de los números que se dan a continuación:

Cte. de Plank	6.625×10^{-34} [J s]
carga del electrón	1.602×10^{-19} [c]
Constante de Avogadro	6.022×10^{23} [1/mol]
Masa del Electrón	9.1×10^{-31} [kg]
Energía de ionización del hidrógeno	13.6 [eV]
Constante de Boltzmann	1.380×10^{-16} [erg$\times$K^{-1}]

b) Redondee los siguientes números a 2 cifras significativas.

3.15; 24.53; 8.06; 0.0253; 0.384; 0.3751; 0.4955; 0.495; 3.850

c) Calcule "y" en las expresiones:

$$y = \frac{5.34^2}{15} + \frac{4.25^2}{7}$$

$$y = 3.85 - \frac{7.5 \times 2.53}{4.28}$$

(15 y 7 son números exactos)

III.8. PROPAGACION DE ERRORES

En esta sección se considerará que se desea encontrar el error en el valor de una cantidad Q, para cuyo cálculo se deben medir otras cantidades A y B.

A. Suma o Diferencia de dos Cantidades.

Sea Q la longitud de un objeto medida cuidando de no tener error de cero. Entonces, suponga que: Q = B - A.

Sean A = (a ± δa) [cm] y B = (b ± δb) [cm], en que δa, δb y δQ son los errores en a, b y Q, respectivamente.

Se tiene el valor promedio de Q cuando B y A tienen los suyos, así que:

$$Q = b - a$$

Por otro lado Q tiene el mínimo valor cuando a y b tienen el máximo y el mínimo valor respectivamente. O sea:

$$Q = (b - \delta.b) - (a + \delta a) = (b - a) - (\delta b + \delta a)$$

Finalmente Q tiene el máximo valor cuando a y b tienen el mínimo y el máximo valor respectivamente. O sea:

$$Q = (b + \delta b) - (a - \delta a) = (b - a) + (\delta b + \delta a)$$

En consecuencia:

El error en una cantidad que es diferencia de otras, es simplemente la suma de los errores en el minuendo y sustraendo.

$$\delta Q = \delta a + \delta b$$

La misma expresión se aplica para la suma entre A y B.

B. <u>El Producto o Cociente entre Dos Cantidades</u>

Un ejemplo del producto aparece en la figura 6.

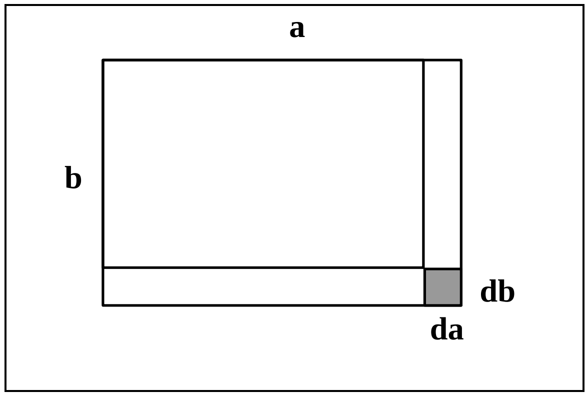

Figura 6. Area de un rectángulo.

Si se supone:

$$Q = A \cdot B$$

Igual como antes, los errores en Q, A y B se denotarán δQ, δa y δb, respectivamente.

Entonces si:

$$Q = (a + \delta a)\,(b + \delta b)$$

El máximo valor de Q, Q + δQ, es igual a:

$$a \cdot \delta b + b \cdot \delta a + \delta a \cdot \delta b + a \cdot b$$

El término δa·δb se puede considerar despreciable, ya que es el producto de dos cantidades pequeñas, y resultará muy pequeño frente a los valores de los otros términos de la expresión.

Entonces:

$$\delta Q = a \cdot \delta b + b \cdot \delta a$$

que expresada en términos de errores relativos lleva a que:

El error relativo del producto de dos cantidades es igual a la suma de los errores relativos de las cantidades factores.

$$\frac{\delta Q}{Q} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$$

Esta relación se aplica tanto a productos como a cocientes.

Problema 1.

Encuentre el máximo error posible en la medición de la fuerza que actúa sobre un objeto de masa m que se mueve sobre una trayectoria circular de radio r con velocidad v, donde:

$m = (3.5 \pm 0.1)$ [kg], $v = (20 \pm 1)$ [m/s],
$r = (12.5 \pm 0.5)$[m].

Si se quiere una expresión general para el error en una variable x que es una función conocida de otras; u, v, ..., en que se conocen los errores cometidos en cada una de esas otras variables; δu, δv, etc.

$$x = f(u, v, \ldots)$$

Siempre que las variables u, v, ... sean independientes entre sí, se emplea la expresión:

$$\delta x = f_u \, \delta u + f_v \, \delta v + \ldots \qquad [8]$$

en que f_u, f_v, ... son las derivadas parciales de x con respecto a: u, v, ...

Se puede comprobar que para el caso en que la función es el producto entre dos variables, la relación para δx de más arriba genera la expresión encontrada antes para el área. Para el caso del cociente hay un signo negativo, que se cambia a positivo ya que se debe considerar la peor situación posible.

III.8 ERRORES Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

En uno de los apartados anteriores sobre cifras significativas, se dijo que el último dígito significativo es el último al que el experimentador honestamente se atreve a darle un valor. Por lo tanto, el error que se comete debe ser comparable con el número que resultaría al hacer cero todas las otras cifras salvo el último dígito significativo. Si no fuera así no habría coherencia entre los conceptos de error y cifra significativa.

De acuerdo a lo anterior se deben cumplir las tres reglas:

1. **Cuando se estima “la incertidumbre” de una magnitud y se expresa como “más” o “menos”, la incertidumbre es una estimación del error.**

Por ejemplo al medir una longitud con una regla de madera cuya mínima división es 1 [mm]. habrá que dar un número cuya última cifra corresponde a las décimas de [mm]. La incertidumbre se podría estimar en ± 0.2 [mm]. y este valor es una estimación del error.

2. **El error se expresa con una sola cifra significativa.**

3. **La cifra que expresa el error, debe coincidir, en cuanto a posición con la última cifra significativa de la cantidad en cuestión.**

De acuerdo a lo anterior, los valores:

(8.286 ± 0.02) [m]
(3.896 ± 0.0002) [m]
(5.876 ± 0.2) [m]

están todos mal escritos porque en todos ellos la posición de la última cifra significativa no coincide con la posición de la cifra en el error.

Nota: Se dice que dos cantidades son del mismo orden de magnitud si la razón entre ellas es mayor que 0.1 y menor que 10 (deben ser cantidades de la misma magnitud expresadas en las mismas unidades). Por lo tanto, la regla 3, no se puede expresar: "tanto la cifra del error como la última cifra significativa deben ser del mismo orden". ¿Por qué?

III.9. DIMENSIONES

Las magnitudes básicas en física se enumeraron en el apartado II.7 en que se definieron las unidades en que se miden. Las otras cantidades físicas como energía, aceleración, ..., etc., se pueden expresar en términos de ellas y por ello se denominan magnitudes derivadas.

La forma en que la magnitud derivada se relaciona con las básicas o fundamentales se puede mostrar por la "dimensión" de la magnitud en cuestión.

La dimensión de la masa se anotará [M]
La dimensión de la longitud se anotará [L]
La dimensión del tiempo se anotará [T]
La dimensión de intensidad de corriente se anotará [I]
La dimensión de temperatura se anotará [Θ]

Note los corchetes junto a las letras para mostrar que se está trabajando con la dimensión de una magnitud. La dimensión de cualquiera otra magnitud será expresable en términos de estas dimensiones básicas.

La Tabla 1 que se muestra a continuación indica las dimensiones de magnitudes conocidas en mecánica y electromagnetismo.

Volumen		m^3	$[L]^3$
Área		m^2	$[L]^2$
velocidad		m/s	$[L][T]^{-1}$
fuerza	Newton	N	$[M][L][T]^{-2}$
energía	Joule	J	$[M][L]^2[T]^{-2}$
potencia	Watt	W	$[M][L]^2[T]^{-3}$
aceleración		ms^{-2}	$[L][T]^{-2}$
presión	Pascal	Pa	$[M][L]^{-1}[T]^{-2}$
momentum		kg m/s	$[M][L][T]^{-1}$
carga eléctrica.	Coulomb	As	$[I][T]$
f.e.m.	Volt	V	$[L]^2[M][T]^{-3}[I]^{-1}$
resistencia	Ohm	Ω	$[L]^2[M][T]^{-3}[I]^{-2}$
inducción magnética	Tesla	T	$[M][T]^{-2}[I]^{-1}$

TABLA N°1

III.9.1 El Uso de las Dimensiones para Comprobar Relaciones

Las dimensiones de ambos miembros de una ecuación deben coincidir. Como ejemplo se considerará la ecuación:

$$y = v_y \ t + \frac{1}{2} a_y \ t^2$$

Escrita en forma dimensional, se tiene:

$$[L] = [L]\,[T]^{-1}\,[T] + [L]\,[T]^{-2}\,[T]^2$$

de lo cual:

$$[L] = [L] + [L]$$

lo que prueba que la ecuación es dimensionalmente correcta, lo que no indica que sea la expresión correcta desde el punto de vista físico. Nótese que ½ es un número puro y por lo tanto no tiene dimensión.

Problema 2.

Demuestre que la relación:

$$F \Delta t = m\, v_f - m\, v_i$$

es correcta.

III.9.2 El Uso de las Dimensiones para Encontrar Relaciones

Si se tiene alguna idea acerca de las magnitudes físicas de que depende otra dada se puede usar el método del análisis dimensional para encontrar una relación entre las variables de importancia. Naturalmente este método no permitirá encontrar los números adimensionales y en algunos casos ni siquiera una única expresión. Por el momento lo que interesa es que sea capaz de buscar expresiones. Los criterios para descartar o aceptar las expresiones, tendrán que ver con la física de la situación particular que se esté analizando.

Se considerarán las oscilaciones de un péndulo simple. Se supondrá que el período del péndulo depende de las magnitudes:

i) La masa de la "lenteja" del péndulo, m.
ii) El largo de la cuerda del péndulo, l.
iii) La intensidad del campo gravitatorio, g.

Se escribirá la relación en la forma:

$$T = k\, m^x L^y T^z$$

donde "x", " y ", "z" son exponentes desconocidos y k es una constante adimensional.

Escribiendo la expresión anterior en forma dimensional:

$$[T] = [M]^x\, [L]^y\, [L]^z\, [T]^{-2z}$$

Igualando los índices para [M], [L] y [T] en ambos miembros de la relación anterior resulta:
[M]: x = 0; [L]: y + z = 0; [T]: 1 = - 2 z

En consecuencia: x = 0; y = ½; z = -½ . Por lo tanto la relación buscada es:

$$T = k \cdot \left[\frac{l}{g} \right]^{1/2}$$

Problemas 3 a 6.

Use el método del análisis dimensional para deducir ecuaciones para:

3) El período de oscilación de una masa suspendida de un resorte vertical.
4) La rapidez con que fluye un líquido a través de una cañería.

Use el método del análisis dimensional para comprobar la validez de las relaciones:

5) $E = m\ c^2$; donde E es la energía que se puede obtener de partícula una masa m con velocidad c, siendo c la velocidad de la luz.
6) La velocidad de escape de un planeta $v_e = \sqrt{2\ R\ g_0}$, donde R es el radio del planeta y g_o es la intensidad del campo gravitacional en la superficie de él.

IV. EL TRABAJO EXPERIMENTAL EN FISICA

¿ Cuánta confianza se puede poner en una teoría si no puede ser respaldada por experimentos?. Ya que la experimentación juega un papel importante en Física es conveniente saber como realizar en forma apropiada experimentos, como presentar observaciones, analizar juegos de datos y establecer conclusiones. Los apartados que siguen en este capítulo se referirán a técnicas de este tipo.

En este curso habrá que realizar, por lo tanto una serie de experimentos más o menos tradicionales en que el objetivo es encontrar un modelo matemático empírico. La mayoría han sido diseñados para confirmar una predicción teórica, pero siempre se pueden encontrar resultados inesperados.

IV.1. Del experimento de prueba

Antes de la realización de un experimento es conveniente efectuar una primera aproximación a él, que se denomina “experimento de prueba”. A continuación se indicara el uso que se la da a este experimento de prueba.

Objetivos

1. Conocer el experimento en general. Todo nuevo experimento, contiene algún aspecto diferente sobre técnicas de medición con el resultado de que las primeras mediciones son más demorosas y menos precisas, mientras uno se familiariza con los aspectos desconocidos.
2. Confirmar que el equipo está funcionando correctamente y que su disposición es conveniente.
3. Fijar los rangos en que se puede tomar las mediciones.
4. Llegar a una primera estimación de la reproducibilidad de las medidas y errores.

Usos

El mayor valor del experimento de prueba consiste en que permite comprobar la planificación previa del experimento. Ayuda, por lo tanto, a modificar esta planificación para llegar al plan de trabajo definitivo. En particular ayuda en los siguientes aspectos.

1. Confirmar que el rango de medición corresponde al rango de interés.

2. Confirmar que los instrumentos tienen la sensibilidad y precisión necesaria.
3. Confirmar que las mediciones representan lo que se quiere medir y no hay defectos evidentes.
4. Estimar el tiempo necesario para cada medida. Esto, junto con la estimación aproximada del error permite llegar a saber cuantas repeticiones de cada medida se necesitan para obtener la precisión deseada y cuantas medidas se pueden obtener en el tiempo disponible. Así es posible distribuir mejor las mediciones en el rango en estudio.
5. Saber las magnitudes aproximadas de las variables, lo que permite evitar errores tontos.
6. Preparar con anticipación las tablas y los gráficos que se van a usar para anotar los datos que se obtengan.
7. Ubicar posibles fuentes de error sistemático y encontrar una forma de trabajo que los evite o elimine.

IV.2. Procedimiento para los Trabajos Prácticos

Los trabajos prácticos son de gran importancia en física, y usted debería realizar todos los experimentos cuidadosamente, no importando lo simple que parezcan ser. El trabajar de este modo le permitirá adquirir una buena técnica experimental.

Lea todas las instrucciones cuidadosamente y planifique el trabajo antes de hacer algo. Pida ayuda si está en una duda, esto es mejor que dañar equipo costoso.

Planifique el número y distribución de los datos que tomará. Si piensa dibujar un gráfico como parte de él, asegúrese de tomar por lo menos ocho datos y de que ellos cubran el rango total de interés.

Siempre tome más de una lectura si hay tiempo y anote la exactitud de ellas.

IV.3. Presentación de tablas de datos

Si hay más de dos variables A, B, C, D,...., es conveniente variar una, B, y estudiar su efecto sobre otra, A, dejando las demás, C, D,...........constantes. La variable dependiente, A, si es posible, deberá ser siempre la misma. En nuestro ejemplo, se estudiarán las variaciones de A correspondientes a cambios en la variable independiente B, dejando C, D,.... constantes, etc.

En cada medición se anotan todos los valores de las variables, no solo las dos con que se está trabajando.

Todos los datos originales deben ser recogidos en "tablas de datos" en que a las diferentes variables corresponden diferentes columnas.

Los valores medidos se anotarán con los números de cifras significativas y las incertezas correspondientes. Las tablas de datos deberán llevar un título para facilitar su identificación y en ellas deberán aparecer los símbolos de las variables y las unidades correspondientes.

Las tablas de datos no se limitarán necesariamente a los valores que se obtienen directamente de la experiencia, sino que también podrán contener columnas con resultados de operaciones entre dichos datos.

Los datos que se pudieran considerar equivocados al recogerlos no se borrarán sino que se tarjarán, escribiendo el nuevo valor obtenido al lado de ellos.

En caso de que mientras se recoge un juego de datos sea necesario llamar la atención sobre un hecho particular o alguna observación que parezca interesante, se debe marcar un asterisco (*) y hacer la aclaración que corresponda inmediatamente a continuación de la tabla.

IV.4 Presentación Gráfica de Datos

Al analizar los datos, difícilmente de la sola observación de la tabla de valores, se podrá establecer el tipo de relación que existe entre las variables. Un método poderoso para estudiarlos es la representación gráfica. A veces ella permite obtener o predecir un modelo matemático para la relación entre las variables inmediatamente. En todo caso el gráfico nos permite observar todos los datos de un vistazo incluyendo los puntos de máximo y mínima inflexión y el tipo general de la curva.

- Confección del Gráfico

Generalmente se hace el gráfico en papel milimetrado. A veces es conveniente o necesario tener en cuenta varias recomendaciones que la práctica ha impuesto como normas:

1. La curva debe llenar el tamaño de la hoja cuando es posible, pero no debe mostrar más exactitud que la incertidumbre de las mediciones, por lo tanto la incertidumbre no debe corresponder a más de una o dos de las divisiones más pequeñas.
2. Generalmente la extensión física de las ordenadas es menor que la de las abscisas por razones de equilibrio estético.
3. Las escalas deben estar numeradas claramente para facilitar la lectura.
4. El punto de intersección de los ejes no tiene que ser necesariamente (0, 0), sino el que sea conveniente.
5. A veces si los valores numéricos de las variables son demasiado pequeños o grandes, se usa un factor de escala (ej.: 10^{-5}; 10^{4}, ..., etc.).
6. En los ejes deben aparecer las variables, unidades y factores de escala si los hay.
7. Al graficar los datos los puntos deben ser claros y marcados con una cruz (x) o con otros símbolos, (como círculos, triángulos, etc.); a veces el tamaño del símbolo representa la incertidumbre de la medición. Si es así, debe quedar claramente establecido.
8. Las escalas empleadas en los ejes pueden ser diferentes.
9. No es necesario que las unidades empleadas en los ejes pertenezcan al mismo sistema de unidades.
10. Al terminar de representar los puntos, se debe dibujar la curva más suave y continua que insinúa el conjunto de ellos, tomando en cuenta la incertidumbre de las mediciones. No es

necesario que esta línea pase por todos o cualquiera de los puntos. El histograma se usa para representar valores promedios de una variable en un intervalo de la otra o cuando se desea representar el número de veces que una determinada variable cae en el intervalo.

11. Se debe poner un título al gráfico en un lugar apropiado.
12. Durante el experimento se debe ir construyendo un gráfico preliminar para saber dónde es necesario tomar más datos y cómo se deberá proceder.
13. En el eje de las abscisas se representa la variable independiente. Una excepción es el tiempo; casi siempre se representa en el eje de las abscisas, aún cuando sea la variable dependiente.
14. En cuanto a la distribución de los puntos del gráfico es imprescindible ir confeccionando un gráfico preliminar mientras se van obteniendo los datos, este gráfico es el que determina la distribución y números de puntos necesarios. Si la curva que "insinúan" los primeros puntos es de forma simple, se pueden tomar relativamente pocos puntos (10 – 12).

Es conveniente, en principio, hacer que la variable independiente tome valores, de manera que los puntos sobre la curva estén distribuidos uniformemente. Esto puede significar que los valores de la variable dependiente estén distribuidos no uniformemente. Si la curva no es simple (ninguna de las discutidas en el apartado referente a Modelos), los puntos sobre la curva deben concentrase en las regiones en que la curva cambia más rápidamente, como se muestra en la figura 7.

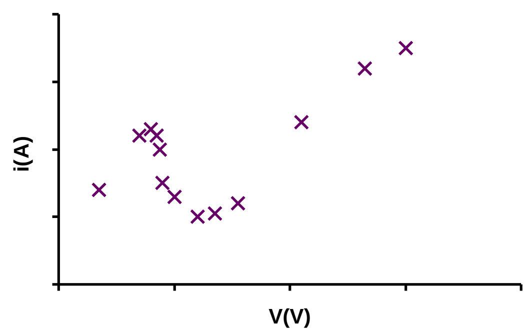

Figura 7. Distribución de las mediciones.

En los gráficos en que figuran los datos originales se pueden dibujar asociados a cada punto la "barra de error" o "banderas de error" que es un trazo cuya longitud es dos veces la desviación estándar de los valores de la variable dependiente correspondiente al mismo de la variable independiente, como se observa en la figura 8. Cada punto tiene por coordenadas el valor de la variable independiente y el mejor valor que representa el conjunto de valores de la variable dependiente que es el promedio.

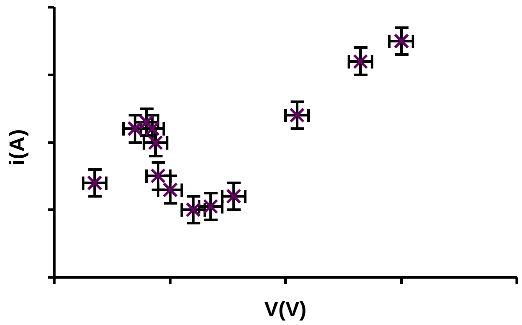

Figura 8. Barras de error asociadas a cada punto.

IV.5. Proporcionalidad

1. Definición: A es directamente proporcional con B cuando entre los valores de las variables A y B existe una relación del tipo:

$$\frac{A}{B} = \text{cte}$$

Entonces A d. p. B o bien A = K B donde K se denomina constante de proporcionalidad.

2. Definición: C es inversamente proporcional, i. p., con D cuando C es directamente proporcional con 1/D. Entonces C d. p. con 1/D ó:

$$CD = \text{cte}$$

3. Definición: E es directamente proporcional con F, G, H, I, entonces, E d. p. con (F,G,H,I), o:

$$E = K_3 \ (F\,G\,H\,L)$$

4. Si se tiene J, L, M, como variables y si J d. p. con L mientras M permanece constante y J d. p. con M mientras L permanece constante, entonces: J d. p. con (L M), o bien: J = K_4 (L M).

$$J = K_4 \ (L\,M)$$

5. Si se tiene L, M, N como variables y si L d. p. M mientras N permanece constante, y L d. p. 1/N cuando M permanece constante, entonces L d. p. (M/N), o bien:

$$L = K_5 \frac{M}{N}$$

IV.6. <u>El modelo matemático que corresponde a la línea recta</u>

Los modelos que se usan en física son en su totalidad de tipo matemático. Esto significa que en este curso siempre se tendrá que llegar a establecer una relación matemática entre las variables que intervienen en el experimento particular que se haya realizado. Muchas veces un gráfico de los datos es el primer paso para establecer el modelo.

Probablemente el gráfico más útil que se pueda encontrar es el de la línea recta y por ello se la considerará en primer lugar.

La ecuación general de la línea recta es:

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

Otra manera más cómoda de escribir la misma ecuación es:

$$y = m\,x + b \qquad [9]$$

donde "y" y "x" son las variables dependiente e independiente, respectivamente. m y b son constantes.

Un ejemplo de la representación gráfica de esa ecuación aparece en la figura 7. Con relación a ella hay que hacer notar:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

a) Cuando x = 0 el intercepto en el eje y es b.
b) Cuando y = 0 el intercepto en el eje x es - b/m.

c) La pendiente de la recta, $\frac{dy}{dx}$, que en este caso coincide con $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, mide la rapidez con que cambia y con respecto a x.

Si se cumple [9], se dirá que "y" y "x" están linealmente relacionadas.

Es conveniente hacer una distinción entre pendiente y pendiente geométrica:

a) En la "**pendiente geométrica**", el numerador y el denominador, son distancias medidas en el gráfico, sin tomar en cuenta las escalas. El resultado de la pendiente geométrica es un número adimensional.
b) En la "pendiente" el numerador está expresado en la escala y unidades de la variable dependiente y el denominador está expresado en la escala y las unidades de la variable independiente. <u>La pendiente tendrá entonces dimensión</u>. Y la unidad corresponderá al cociente entre las unidades utilizadas en los ejes.

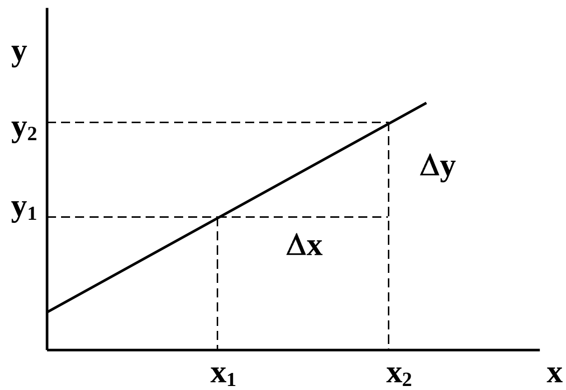

Figura 7. Recta que no pasa por el origen.

V. EL MODELO Y SU BUSQUEDA

V.1. Introducción

El proceso central del método científico consiste en:

1.- Hacer investigaciones para describir el comportamiento de cierto sistema.
2.- Crear un modelo que describa tal comportamiento.
3.- Usar el modelo para hacer predicciones del comportamiento de otros sistemas.
4.- Realizar nuevos experimentos para comprobar las predicciones deducidas.
5.- Modificar el modelo según las exigencias de los nuevos datos.

Según la fuerza de la evidencia experimental que apoya a un modelo éste se podrá denominar hipótesis, teoría, ley, relación.

Al terminar un experimento lo que realmente se conoce son los valores medidos de las variables observadas las cuales no se puede, como se ha discutido, determinar con certeza.

El paso siguiente es utilizar la tabla de valores para confeccionar un gráfico. La curva aproximada que se puede trazar, mostrará en mejor forma, de un solo vistazo, cuál es la relación entre los pares de valores medidos de las variables que se analizan. Pero aún la información obtenida es incompleta.

La etapa final, consistirá en encontrar la relación matemática que mejor se ajusta a la curva experimental, graficada anteriormente y por lo tanto que exprese de la mejor manera posible la relación entre las variables presentadas, obteniendo de esta forma el modelo matemático que, para los datos obtenidos mejor representa al fenómeno físico observado.

V.2 Ajuste de curvas

Si los n pares de valores (x_j, y_j) no están correlacionados linealmente se podría admitir que las variables están vinculadas por una relación funcional.

$$y=f(x) \qquad [10]$$

En que "x" es la variable independiente e "y" la variable dependiente. Se admite que "y" se ha medido para valores fijos de "x" los cuales se supone no tienen error. Por ejemplo en la determinación del coeficiente de dilatación lineal de una barra con la temperatura, se van leyendo alargamientos (o variables que permiten determinar alargamientos) para valores prefijados de la temperatura. La variable independiente es naturalmente la temperatura y la dependiente, la longitud.

Los puntos tenderán a disponerse en el gráfico sobre la curva

$$y = f(x)$$

pero los errores experimentales hacen que dicha función no esté perfectamente determinada y el conjunto de pares de valores conducirá a obtener una función $f_1(x)$, empírica, como mejor estimación de f(x).

Por otra parte, cualquier curva plana se puede aproximar mediante un polinomio del tipo:

$$y = \sum_i a_i x^i \qquad [11]$$

que podría constituir la función empírica $f_1(x)$, siendo las incógnitas a_i con i = 0, 1, 2,...., N. En que N es el grado de polinomio. Este caso será resuelto por el método de los mínimos cuadrados en una de las alternativas del programa AJUST-1.

Pero muchas veces los pares de puntos se disponen siguiendo una curva expresable mediante una función no lineal, y = f(x), que posee sólo dos constantes indeterminadas. En este caso mediante un cambio conveniente de variables la situación se reduce al caso lineal ya estudiado. Las únicas incógnitas son los dos coeficientes de la relación lineal que se pueden determinar gráfica o aritméticamente.

Estas transformaciones de "linealización" se visualizan fácilmente operando como sigue: obtenida la representación cartesiana de los pares (x_j, y_j) se analiza, a ojo, que función simple conocida que posea solo dos constantes indeterminadas se adapta mejor al conjunto de puntos.

Se busca un cambio de variables x' = u(x); y' = v(y) que linealice dicha función. Se calculan los valores $x'_j = u(x_j)$ e $y'_j = v(y_j)$. Se representan estos valores en un gráfico cartesiano de ejes x', y'. Si los puntos (x'_j, y'_j) se ubican en torno a una recta se determinan los coeficientes de la recta, m' y b' en el sistema x', y'. Con los valores m' y b' se pueden, finalmente, obtener los coeficientes de la función propuesta.

V.2.1 Linealización de algunas relaciones funcionales

A) Relaciones hiperbólicas

Si los pares de puntos (x_j, y_j) se disponen de acuerdo con algunas de las hipérbolas equiláteras que muestra la figura 8, las transformaciones a realizar son las siguientes:
Si:

$$y = \frac{b}{x} \tag{12}$$

el cambio de variable a utilizar es:

$$y' = y \quad ; \quad x' = \frac{1}{x}$$

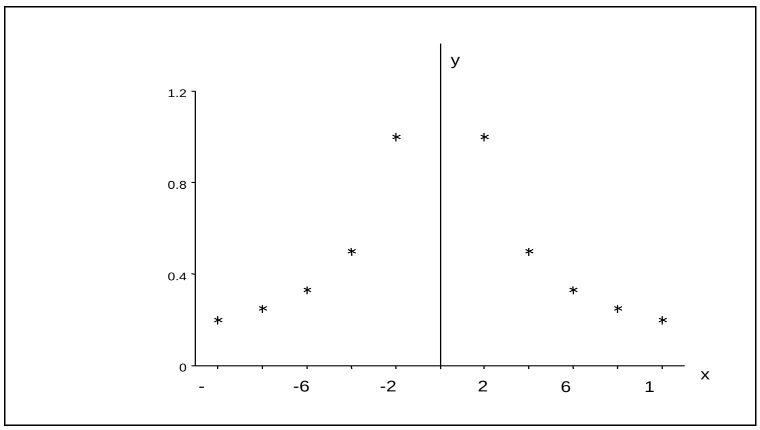

Figura 8.- Hipérbolas equiláteras.

con lo que se tiene:

$$y' = k\,x'$$

En un sistema cartesiano de ejes y' y x', se obtiene una recta que pasa por el origen.

Los casos en que la hipérbola tiene una asíntota horizontal, vertical o de ambos tipos, se discutirán a continuación; ver figura 9a, 9b y 9c:

a). Si la hipérbola tiene una asíntota horizontal la ecuación es:

$$y = a + \frac{b}{x} \tag{13}$$

para un cambio de variables: y' = y ; x' = 1/x, la recta es:

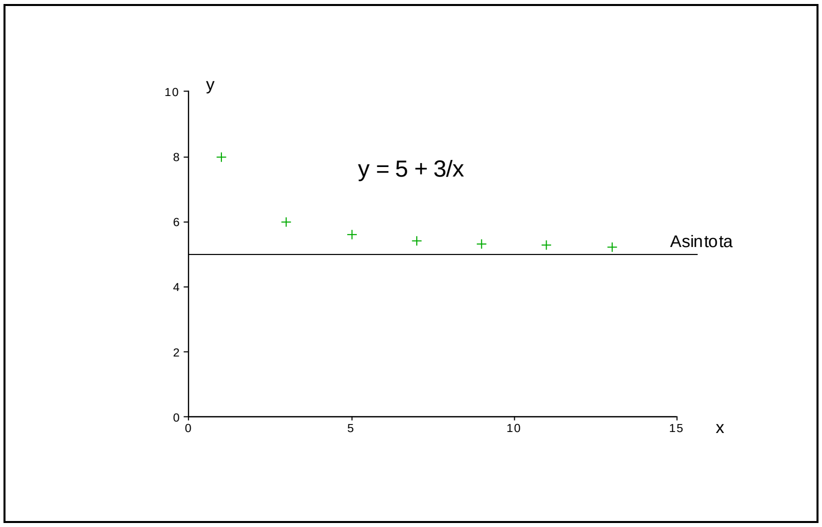

Figura 9a. Hipérbola con asíntota horizontal.

$$y' = a + bx'$$

b). Si la hipérbola tiene una asíntota vertical la función es:

$$y = \frac{c}{x + d} \qquad [14]$$

Un cambio de variables: y' = 1/y ; x' = x, linealiza la función.
c). Si la hipérbola tiene dos asíntotas la función es:

$$y = e + \frac{f}{x + g} \qquad [15]$$

El cambio de variables y' = y ; x' = 1/(x+g), linealiza la función.

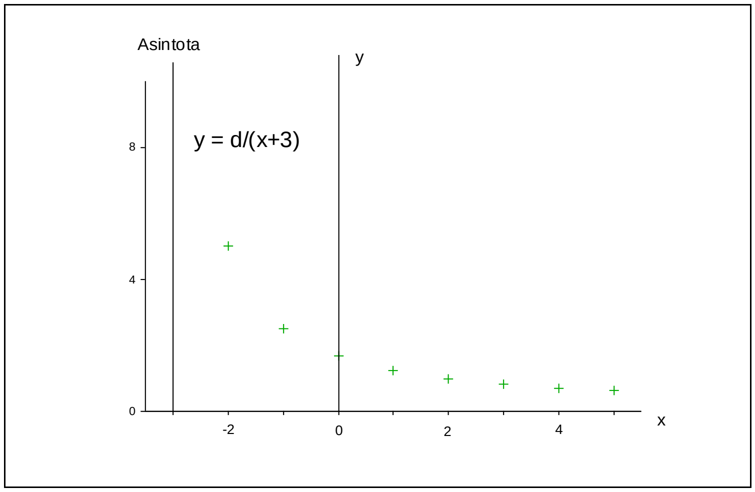

Figura 9b. Hipérbola con asíntota vertical.

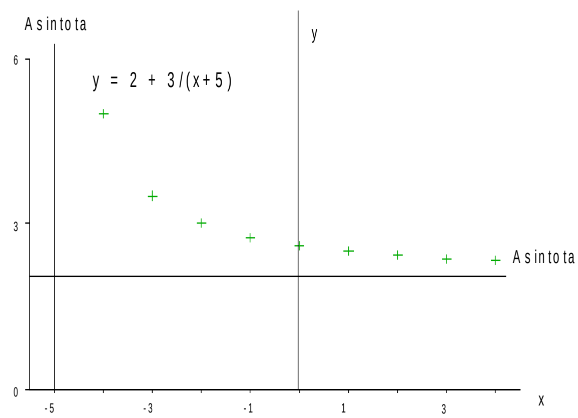

Figura 9c. Hipérbola con dos asíntotas.

Nota: Se le recomienda que use el programa AJUST-1 como ayuda en las actividades que siguen.

<u>Actividades</u> 6 a 8.

1) Dadas las tablas de datos que aparecen a continuación trate de establecer un modelo matemático para la relación entre las variables x e y:

(a)

X	y
0.0895	-36.6
0.173	-18.9
0.256	-12.8
0.563	-5.83
0.830	-3.95
1.22	-2.69
1.36	-2.41
2.92	-1.12
4.12	-0.796
6.25	-0.525

(b)

x	y
0.0895	62.1
0.173	32.1
0.256	21.7
0.563	9.88
0.830	6.70
1.22	4.56
1.36	4.09
2.92	1.90
4.12	1.35
6.25	0.890

(c)

x	y
0.0895	0.227
0.173	0.219
0.256	0.212
0.563	0.190
0.830	0.174
1.22	0.155
1.36	0.149
2.92	0.105
4.12	0.0851
6.25	0.0640

NOTA MATEMATICA

$$B = A^n$$

En una potencia se distinguen tres elementos. La base, exponente y el valor de la potencia:
A: base
n: exponente
B: valor de la potencia
En esta igualdad pueden ser incógnitas cualquiera de las tres cantidades.

1° Si B es la incógnita. Entonces se resuelve la situación con la **operación potenciación**, es decir, se obtendrá:

$$x = A^n$$

2° Si la base A es la incógnita, o sea $B = x^n$, se tendrá que resolver utilizando la **radicación**, es decir, se obtendrá:

$$x = (B)^{1/n}$$

3° Si el exponente "n" es la incógnita, o sea $B = A^x$, entonces para resolver el problema, se tendrá que aplicar la **operación logarítmica**, la cual se define por:

$$x = \log_A (B)$$

lo cual significa que "x" es el exponente al que se debe elevar la base A para obtener el número B.

Algunos ejemplos

$x = \log_{10}(100) = 2$; $x = 2$ ya que $10^2 = 100$

$x = \log_2(8) = 3$; $x = 3$ ya que $2^3 = 8$

$x = \log_{10}(2) = 0.30103$; $x = 0.30103$ ya que $10^{0.30103...} = 2$

Los logaritmos se agrupan según la base en los llamados sistemas de logaritmos. Los más utilizados son:

a) El sistema de logaritmos de base "10" ó logaritmos vulgares. La notación que se empleará para este tipo es "log".
b) El sistema de logaritmos de base "e" ó logaritmos neperianos. La notación que se empleará para este tipo es "ln". El valor de la base de estos logaritmos es $e \approx 2.7182818....$

Algunos teoremas sobre logaritmos:

1. El logaritmo de la unidad es cero, en cualquier base o sistema.

$$\log 1 = 0 \text{ pues } B^0 = 1\text{, para B la base de logaritmos}$$

2. El logaritmo de la base del sistema es 1.

$$\log B = 1 \text{ pues } B^1 = B\text{, para B la base de logaritmos}$$

3. El logaritmo de una potencia de la base es igual al exponente, por definición.

$$\log(B^n) = n\text{, para B la base de logaritmos}$$

4. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log(A\,B) = \log A + \log B$$

5. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor

$$\log_B\left(\frac{M}{N}\right) = \log_B(M) - \log_B(N)$$

6. El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base

$$\log A^n = n \log A$$

7. El logaritmo de una raíz es igual al valor recíproco del índice multiplicado por el logaritmo de la cantidad subradical.

$$\log_B(M^{1/n}) = \frac{1}{n} \log_B(M)$$

8. Para cambiar de una base logarítmica A a otra B se emplea el teorema de cambio de base:

$$\log_B(X) = \frac{\log_A(X)}{\log_A(B)}$$

<u>Actividades 9 a 11</u>.

1) Usando un par de trozos de cartulina construya un artefacto, que basado en las propiedades de los logaritmos (regla de cálculo) permita multiplicar y dividir.
2) ¿Cómo debe ser la escala de cuadrados con relación a la anterior en la misma regla de cálculo?
3) ¿Qué relación hay entre las distancias desde el 1 al 2, 1 al 4, 1 al 8 en la misma regla de cálculo?. ¿ Por qué?

B) <u>Relación Potencial</u>

$$y = K \; x^n \qquad \text{con } K > 0 \qquad [16]$$

Si los puntos (x_j, y_j) se disponen en el gráfico como en las figuras 10 a) y b) podría ocurrir que el modelo matemático que exprese la relación entre las variables "y" y "x" fuera del tipo potencial:
(Si n = - 1 se cae en la relación hiperbólica del caso anterior)

El tratamiento es común para los casos:

a) $n > 1$.
b) $0 < n < 1$.

El cambio que linealiza la función es:

$$y' = \log y$$
$$x' = \log x$$

ya que al aplicar logaritmo a ambos miembros de la relación:

$$y = K\,x^n$$

se tiene:

$$\log y = \log k + n \log x$$

Usando las relaciones de transformación se obtiene:

$$y' = b' + n\ x'$$

La pendiente de la recta da el valor de n, y la ordenada en el origen da el valor de b' del cual se puede obtener K, ya que b' = log K.

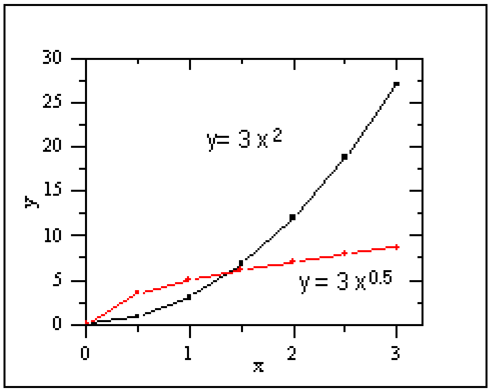

Figura 10. Gráficos de funciones potenciales.

Si la forma de las curvas es del tipo potencial, pero con una traslación "c" en la ordenada se tienen los gráficos como los mostrados en la figura 11.

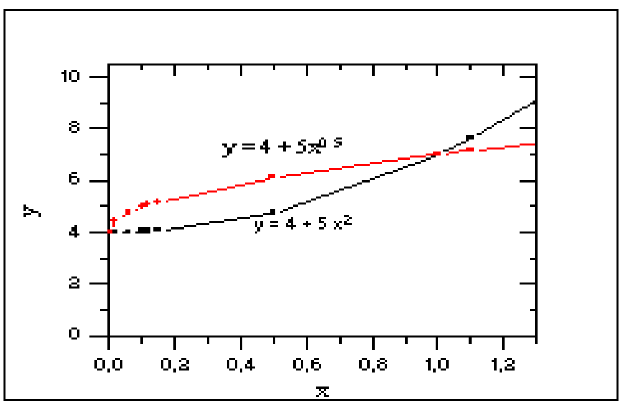

Figura 11. Relación potencial desplazada.

El cambio de variables:

$$y' = \log(y - c) \qquad x' = \log x$$

lo transforma en el caso anterior.

Ejemplo: Al investigar la relación entre la potencia eléctrica y la corriente que circula por un conductor óhmico se obtuvo la siguiente tabla de datos:

I (A)	P (W)	log I	log P
3	99	0.477	1.996
4	176	0.602	2.246
5	275	0.699	2.441
6	396	0.778	2.598
7	539	0.845	2.732
8	704	0.903	2.848

Tabla N°2

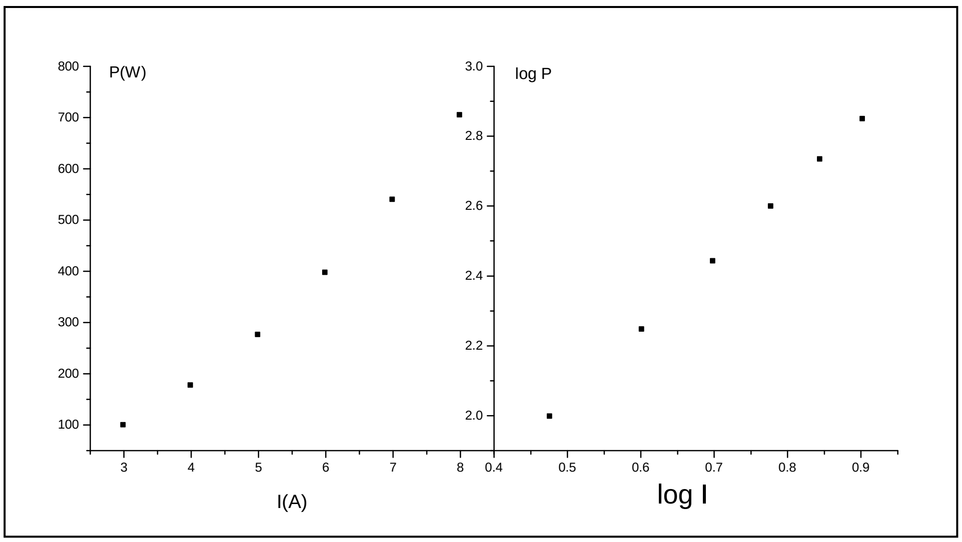

Figura 12. Gráficas de la potencia versus la intensidad de la corriente.

De la linealización:

$$n = 2; \log K = 1.04$$

Por lo cual:

$$K = 11$$

Por lo tanto:

$$P = 11.\, I^2$$

<u>Actividades 12 a 14.</u>

1) Dadas las tablas de datos que aparecen a continuación trate de establecer un modelo matemático para la relación entre las variables x e y:

(a)

x	y
0.0842	0.155
0.253	0.808
0.544	2.55
0.825	4.76
1.53	12.0
2.63	27.1
3.55	42.5
4.89	68.7
6.25	99.2
7.74	137.

(b)

x	y
0.0842	1.63
0.253	3.71
0.544	6.59
0.825	9.00
1.53	14.3
2.63	21.5
3.55	26.9
4.89	34.2
6.25	41.1
7.74	48.3

(c)

x	y
0.145	201.2
0.638	10.39
2.43	0.7164
4.87	0.1784
6.98	0.08682
8.14	0.06384
10.3	0.03987
13.7	0.02254

C) Relación Exponencial

Si los puntos (x_j, y_j) se disponen en el gráfico como en las figuras 13 a) y 13 b), podría ocurrir que el modelo matemático que expresa la relación entre las variables "y" y "x" fuera del tipo:

$$y = A\ e^{\alpha x} \qquad [17]$$

Donde **e** es la base de los logaritmos naturales o Neperianos. Aplicando logaritmos neperianos a ambos miembros de la relación [17]:

$$\ln y = \ln (k\ e^{\alpha x})$$

aplicando los teoremas 4, 6 y 3.

$$\ln y = \ln K + \alpha\ x$$

Luego el cambio de variables recomendable es:

$$y' = \ln y \quad ; \quad x' = x$$

que permitirá determinar K y α del intercepto en el origen y la pendiente de la recta. Si la pendiente es positiva, la exponencial es creciente, curva b), si es negativa será decreciente, curva a).

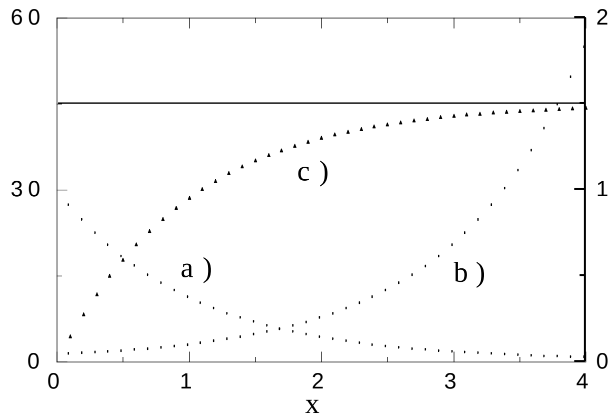

Figura 13. Gráficas de modelos matemáticos exponenciales.

Si se usa papel semi-log y se disponen los puntos (x_j, y_j) siguiendo una línea recta, cuando la variable independiente se coloca en el eje lineal, la relación entre "y" y "x" es exponencial.

Si los puntos (x_j,y_j) se disponen en el gráfico como en la figura 13 c), el modelo matemático que podría expresar la relación entre las variables "x" e "y" es:

$$y = C\,(1 - e^{-bx})$$

Si la asíntota pasa por C, el cambio de variable aconsejable es:

$$y' = \ln\left(1 - \frac{y}{C}\right) \quad ; \quad x' = x$$

que daría origen a un gráfico (x', y') lineal, que pasaría por el origen si el modelo matemático supuesto es el que mejor expresa la relación entre las variables x e y.

Actividades 15 a 17.

1) Dadas las tablas de datos que aparece a continuación, trate de establecer un modelo matemático para la relación entre las variables x e y:

(a)

x	y
0.0523	8.67
0.253	8.16

(b)

x	y
0.0523	13.56
0.253	13.26

0.543	7.51
1.45	6.00
2.97	4.59
4.05	4.08
6.85	3.54
7.99	3.47

0.543	12.88
1.45	11.97
2.97	11.14
4.05	10.83
6.85	10.50
7.99	10.46

2) Calcule el valor de la carga eléctrica, Q(t), en un capacitor de capacitancia C [F], que ha sido cargado con 100 [C], y a continuación, se ha conectado a un resistor de resistencia R[Ω]. La expresión para la carga en función del tiempo es:

$$Q(t) = 100\ e^{-\frac{t}{\tau}} \quad [\text{ c }]$$

Determine el valor de la carga para t = 1, 2, 3, 4, 5, 6 [s], la constante τ = 2[s]. Cabe hacer notar que $\tau = R\ C$.

V.2.2 RELACION ENTRE TRES O MAS VARIABLES (FUNCIONES POTENCIALES)

Se analizará el caso de un fenómeno físico en el cual se observará el comportamiento de 3 variables con el objeto de encontrar una ley empírica que las relacione.

Sean estas variables "u", "v" y "w". Se supondrá que "u" es la variable dependiente.

Entonces se mantiene "w" constante y se estudia cómo se relacionan "u" y "v". Suponga que la relación encontrada es $u = K_1\ v^n$.

Ahora se mantiene "v" constante y se busca cómo se relacionan "u" y "w". Suponga que la relación encontrada es $u = K_2\ w^m$.

$$u = K\ v^n\ w^m$$

Usando lo aprendido sobre proporcionalidad, se obtiene la relación entre "u", "v" y "w":

Como los exponentes n y m han sido encontrados previamente, lo que falta por determinar es la constante de proporcionalidad K, para lo cual se gráfica "u" versus "($v^n\ w^m$)", de modo que la gráfica resultante será una línea recta cuya pendiente da el valor de K.

Una aplicación de esto se tiene en la Actividad 18, péndulo bifilar. Como Ud. aún no la realiza, se le presentarán juegos de datos obtenidos por un alumno, los gráficos correspondientes y los valores de los parámetros de importancia encontrados al hacer los ajustes.

Relación entre T y l:

l [cm]	T [s]	d [cm]
2.55	0.5542	16.00
8.00	1.006	16.00
12.60	1.281	16.00
18.10	1.544	16.00
23.37	1.745	16.00
28.15	1.922	16.00
33.00	2.072	16.00
38.00	2.231	16.00
43.70	2.387	16.00

Tabla N° 3.

Con estos datos obtenidos experimentalmente se construye el gráfico T - l, el cual se muestra en la figura 14.

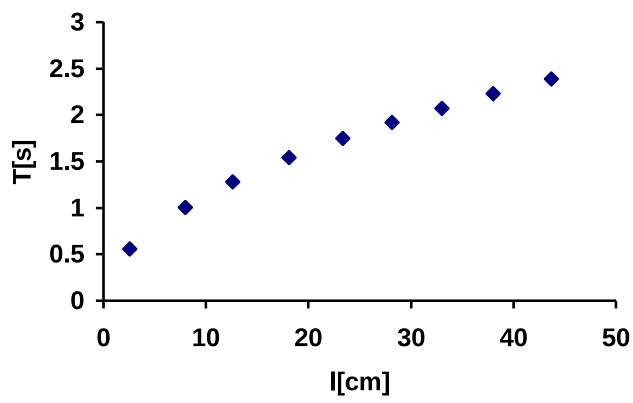

Figura 14. Gráfico T versus l con d constante.

Este gráfico parece indicar una relación potencial entre T y l, por lo cual se debe construir un gráfico log T - log l, el cual se ilustra en la figura 15.

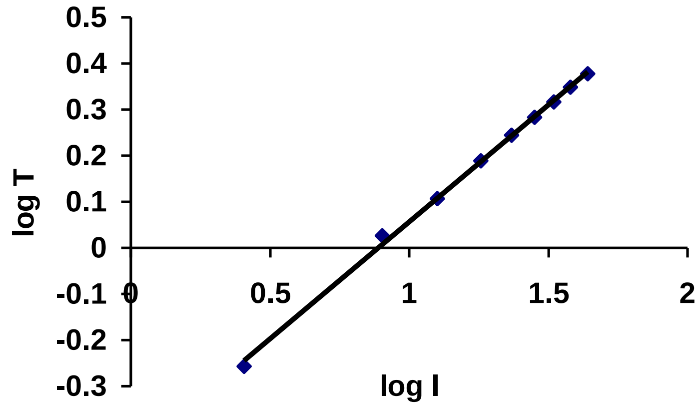

Figura 15. Gráfico log T vs log l.

Usando el programa AJUST-1 se obtiene el intercepto y la pendiente de la recta, que resultan respectivamente:

$$b = 0.462 \pm 0.004 \quad ; \quad m = 0.514 \pm 0.003$$

del supuesto de una relación del tipo:

$$T = K_1 \; l^m$$

$$\log T = \log K_1 + m \log l$$

donde $b = \log K_1$ y $m = 0.514 \approx 0.5$.

Entonces, $10^b = 10^{0.462} \approx 2.90$.

De lo cual se podría inferir que para d = 16.00 [cm]:

$$T \approx 2.90 \; l^{1/2}$$

Relación entre T y d:

d [cm]	T [s]	l [cm]
4.00	6.442	20.50
10.00	2.611	20.50
16.00	1.636	20.50
20.00	1.304	20.50
26.00	1.000	20.50
30.00	0.8587	20.50
36.00	0.7153	20.50
42.00	0.6213	20.50
46.00	0.5650	20.50

Tabla N° 4.

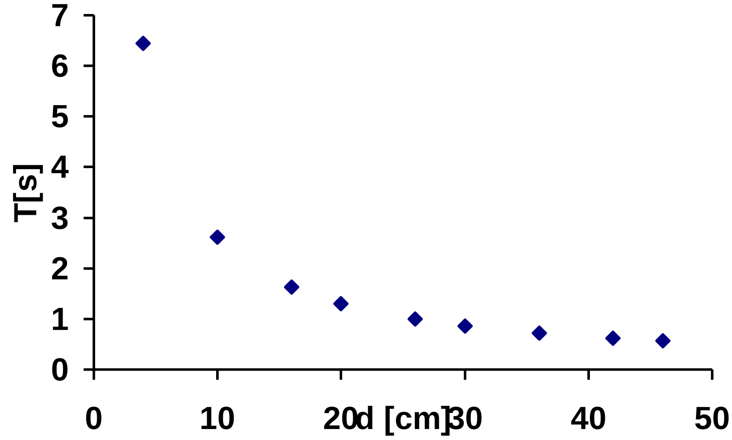

Figura 16. Gráfico T versus d con l constante.

El gráfico T- d parece indicar una relación de tipo $T = K_2\, d^{-m}$. Entonces se debe construir un gráfico log T - log d, el cual se ilustra en la figura 17.

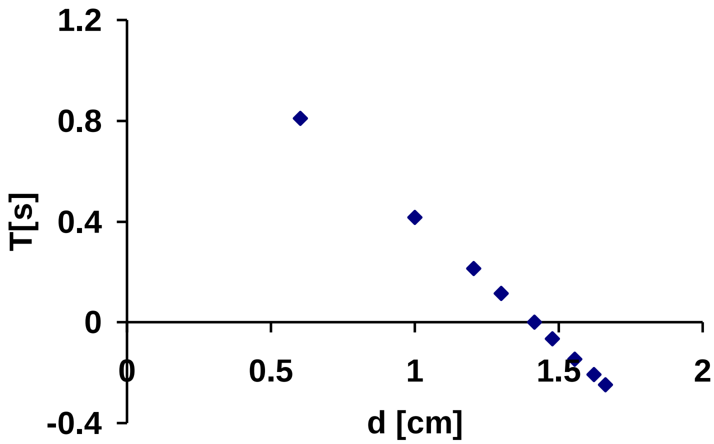

Figura 17. Gráfico log T versus log d.

Los valores del intercepto en el origen y la pendiente de la recta, usando el programa AJUST-1 son respectivamente:

$$b = 1.413 \pm 0.004 \quad ; \quad m = -0.999 \pm 0.003$$

del supuesto de una relación del tipo:

$$T = K_2 d^{-m}$$

$$\log T = \log K_2 - m \log d$$

donde $b = \log K_2$ y $m = -0.999 \approx -1$.

Entonces, $10^b = 10^{1.413} \approx 25.9$

De lo cual se podría inferir que para l = 20.50 [cm]:

$$T \approx 25.9\ d^{-1}$$

Relación entre T, l y d.

Utilizando los procedimientos aprendidos anteriormente, de la "linealización" de las curvas se han obtenido:

$$T \approx 2.90\ l^{1/2}$$

$$T \approx 25.9\ d^{-1}$$

En consecuencia se debe tener:

$$T = K_3\ T(l\ ,\ d) = K_3\ (l^{1/2} d^{-1})$$

Usando esta última relación se construye una nueva tabla de datos, en la cual la variable independiente es $l^{\frac{1}{2}}\, d^{-1}$.

$l^{1/2} \times d^{-1}$ [cm^{-1}]	T [s]
0.09980	0.5542
0.09843	0.5650
0.1078	0.6213
0.1258	0.7152
0.1509	0.8587
0.1741	1.000
0.1768	1.006
0.2219	1.281
0.2264	1.304
0.2659	1.543
0.2830	1.636
0.3021	1.745
0.3316	1.922
0.3590	2.072
0.3853	2.231
0.4132	2.387
0.4528	2.611
1.132	6.442

TABLA N°5

- Para construir la primera columna de esta última tabla se han usado los datos de las tablas 3 y 4.

- Del gráfico se puede encontrar el valor de K_3, como la pendiente del gráfico T versus ($l^{½}\times d^{-1}$).

Los valores del intercepto en el origen y la pendiente de la recta, usando el programa AJUST-1 son respectivamente:

$$b = 0.013 \pm 0.006 \qquad m = 5.70 \pm 0.02$$

que corresponden a una recta que prácticamente pasa por el origen y tiene pendiente m. En consecuencia:

$$T = 5.70\frac{l^{1/2}}{d}$$

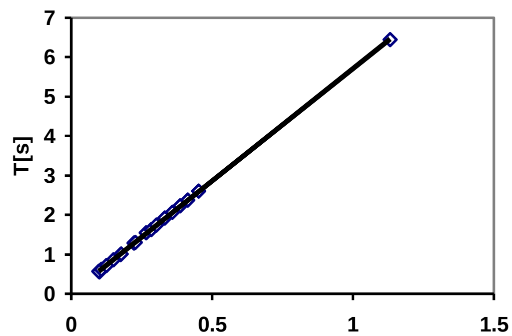

Figura 20. Gráfico T versus ($l^{½}$ d^{-1}).

La expresión teórica para el período del péndulo bifilar en que se usa una varilla es:

$$T = \frac{2\pi}{d}\sqrt{\frac{4Il}{mg}}$$

de esta expresión, y considerando la expresión para el momento de inercia, I, (de la varilla, ver capítulo sobre momentum angular y rotación del cuerpo rígido), se infiere que si L es el largo de la varilla:

$$T = 5.79\frac{l^{1/2}}{d}$$

que difiere del valor experimental obtenido por el alumno en 1.5 por ciento.